MSc Probabilidade 2023.1
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Paulo César P. Carvalho
Monitor Lucas Machado Moschen

Lista 1

Solução 1. Um possível raciocínio para esse problema é o seguinte. Como a moeda é honesta, temos que a probabilidade de uma jogada ser cara é igual a de ser coroa e igual a $1/2$. Seja p_n a probabilidade de que em n lançamentos o número de caras seja ímpar. Na $n+1$-ésima jogada, teremos $+1$ ou $+0$ caras, cada um desses eventos com igual probabilidade. Note que independente do que aconteceu nas últimas n jogadas (se foi par ou ímpar), a última jogada vai determinar se é par ou ímpar. Com isso temos que para todo n, $p_n = 1/2$.

Outro raciocínio é calcular o número de jogadas favoráveis sobre as possíveis. Como são n jogadas, temos 2^n possíveis resultados de sequências de caras e coroas. Quantas dessas tem exatamente 1 cara? n. Quantas tem exatamente 3 caras? escolha 3 elementos de n, assim C_3^n, então

$$\text{Casos favoráveis: } \sum_{i=1,\text{ímpar}}^{n} C_i^n = 2^{n-1},$$

assim temos que nossa probabilidade é $2^{n-1}/2^n = 1/2$.

Solução 2. Considere os casos:

(a) Nesse caso, considere o espaço amostral como o espaço das sequências de remoções das bolas. A probabilidade de 7 cair na posição i é igual a de cair na posição j para $1 \leq i, j \leq 10$, visto que a probabilidade de retirar qualquer número é equivalente. Com isso, temos que a probabilidade do primeiro jogador vencer é $1/2$, visto que o número de posições pares é igual a de ímpares.

(b) Seja o espaço amostral os números naturais, que indicam o número necessário de retiradas até se obter o número 7. Seja A_i o evento de que a jogada saiu na i-ésima jogada. Assim,

$$P(A_i) = \left(\frac{9}{10}\right)^{i-1} \frac{1}{10},$$

isto é, não saiu 7 nas primeiras $i-1$ jogadas e saiu na i-ésima. Com isso, estamos interessados em

$$P(A_1 \cup A_3 \cup \cdots) = \sum_{i=1,\text{ímpar}}^{\infty} P(A_i),$$

usando que esses eventos são disjuntos. Assim,

$$\sum_{i=1,\text{ímpar}}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1,\text{ímpar}}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{i-1} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{2k} = \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{81}{100}} = \frac{10}{19}.$$

Solução 3. Lembrando que o dominó é formado por 28 peças diferentes contendo todas as combinações de dois números entre 0 e 6. Uma maneira de resolver esse problema é considerar um modelo equiprovável (espaço amostral é o conjunto dos pares de peças) e contar o número de casos favoráveis sobre todos os casos. O tamanho do espaço amostral é C_2^{28}. Os casos favoráveis são aqueles cujas peças compartilham um número. Se uma das peças tem os dois números iguais (7 peças são assim), então existem outras 6 peças com esses números. Com isso temos $7 \cdot 6 = 42$ possibilidades para esse caso. Note que não estamos contando duplicado, pois uma das peças tem valores iguais e a outra não. Agora, se os valores das duas peças são diferentes, temos 21 opções. Para cada peça exitem $5 + 5 = 10$ outras peças que compartilham um número e que não sejam de valores iguais. Com isso teremos $21 \cdot 10/2 = 105$ peças nessa situação. Como essas situações são disjuntas, temos que

$$P(\text{duas peças ao acaso compartilharem um número}) = \frac{42 + 105}{C_2^{28}} = \frac{147}{14 \cdot 27} = \frac{7}{18}.$$

Outra maneira de calcular o número de casos favoráveis é fixando o número que ambos compartilham (7 números) e depois escolhendo os outros dois números. Para isso, ainda é conveniente separar nos dois casos que fixamos acima.

Solução 4. Considere o espaço amostral nesse caso os grupos de pessoas que recebem o sabor A. Temos C_n^{2n} maneiras distintas de atribuir n sabores A a $2n$ pessoas. Com isso, esse é o tamanho do espaço amostral. Como a distribuição é o acaso, cada um desses casos tem probabilidade igual de acontecer. Todas as pessoas vão ser respeitas nos grupos em que hajam a pessoas que gostam do sabor A e as outras $n - a$ pessoas não tenham preferência. Fixamos então as a pessoas nesses grupos que nos favorecem e temos $n - a$ espaços livres para serem preenchidos pelas pessoas sem preferência $(2n - a - b)$. Com isso temos $C_{n-a}^{2n-(a+b)}$ maneiras de fazer essa escolha e, então, a probabilidade desejada é $C_{n-a}^{2n-(a+b)}/C_n^{2n}$.

Solução 5.

Lema. $P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$.

Demonstração. Como $A \cap B \subset B$, vale que $P(A \cap B) \leq P(B)$. Além disso,

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1,$$

o que encerra a demonstração. □

Agora suponha que $P(A_n) \to 1$ e $P(B_n) \to p$ quando $n \to \infty$. Assim

$$P(A_n) + P(B_n) - 1 \to p$$

pela propriedade da soma de limites. Pelo Teorema do Confronto / Sanduíche e usando a desigualdade do lema acima, vale que

$$P(A_n \cap B_n) \to p \text{ quando } n \to \infty.$$

Solução 6. Para resolver esse exercício, vou primeiro usar uma desigualdade conhecida de probabilidade e depois mostrar que ela é a desigualdade mais justa que conseguimos ter com a informação limitada que temos.

(a) Vimos no lema acima que $P(A \cap B) \leq P(B)$ e também $P(A \cap B) \leq P(A)$. Note que se $A \cap B = B$ ou $A \cap B = A$, a desigualdade se torna uma igualdade e, portanto, não conseguimos encontrar uma desigualdade melhor ainda. Portanto

$$P(A \cap B) \leq 0,6.$$

No outro sentido, temos $P(A) + P(B) - 1 = 0,3 \leq P(A \cap B)$. Será que conseguimos melhorar essa desigualdade? Infelizmente não, pois, no pior dos casos, se $P(A \cup B) = 1$, temos que $P(A \cap B) = 0,3$. Como não temos essa informação, vale que

$$0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6.$$

(b) Usando um raciocínio similar, é fácil ver que $P(A \cap B \cap C) \leq P(A) = 0,6$, usando a propriedade da inclusão e, no pior dos casos, podemos ter $A \cap B \cap C = A$, o que leva a igualdade. Para a desigualdade inferior, tome dois eventos e considere o menor valor possível para a probabilidade de sua intersecção. Assim, $P(A \cap B) \geq 0,3$, $P(A \cap C) \geq 0,4$ e $P(B \cap C) \geq 0,5$. Considerando o caso extremo para cada uma dessas intersecções e usando a mesma propriedade, notamos que

$$P(A \cap B \cap C) \geq 0,1,$$

o que encerra nosso resultado. Outra maneira de obter uma desigualdade inferior é notando que

$$P(A \cap B \cap C) = 1 - P(A^c \cup B^c \cup C^c) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c) - P(C^c),$$

sendo essa última desigualdade máxima no caso em que os complementares são disjuntos, o que é possível no nosso caso, dado que as probabilidades dos complementares não soma 1.