Probabilidade - Lista 10
Soluções
Lucas Moschen

1. $X_1, X_2, \ldots \overset{iid}{\sim} U[0,1]$

Definimos
$$S_n = \frac{1}{2n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Resultado auxiliar: Se $a_n \to a$ e $X_n \xrightarrow{P} X$, então $a_n X_n \xrightarrow{P} aX$.

Obs.: é consequência do teorema do mapa contínuo.

Dem.: Note que
$$a_n X_n - aX = a_n X_n - a_n X + a_n X - aX = a_n(X_n - X) + (a_n - a)X.$$

Tome $\varepsilon > 0$. Queremos mostrar que $P(|a_n X_n - aX| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Tome $\gamma > 0$. Escolha $\delta > 0$ de forma que $P(|X| > \varepsilon/\delta) < \gamma/2$. Assim existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow |a - a_n| < \delta$ e $P(|X_n - X| > \varepsilon/2(|a|+\delta)) < \gamma/2$.

Assim:
$$\begin{aligned}
P(|a_n X_n - aX| > \varepsilon) &= P(|a_n(X_n - X) + (a_n - a)X| > \varepsilon) \\
&\leq P(|a_n||X_n - X| + |a_n - a||X| > \varepsilon) \\
&\leq P((|a| + \delta)|X_n - X| + \delta|X| > \varepsilon) \\
&\leq P((|a|+\delta)|X_n - X| > \varepsilon/2 \text{ ou } \delta|X| > \varepsilon/2) \\
&\leq P(|X_n - X| > \varepsilon/2(|a|+\delta)) + P(|X| > \varepsilon/2\delta) \\
&< \gamma/2 + \gamma/2 = \gamma
\end{aligned}$$

Verifique pensando em $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Note que um dos deles tem que ser verdade para a soma ser $> \varepsilon$

$\Rightarrow a_n X_n \xrightarrow{P} aX$.

Usando esse lema e a lei fraca dos grandes números
$$S_n \xrightarrow{P} \frac{1}{2}E[X_1^2] = \frac{1}{2}\left(\text{Var}(X_1) + E[X_1]^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

2. $(X_n)_{n\geq 1}$, $E[X_n] \to \alpha$ e $Var(X_n) \to 0$, então $X_n \xrightarrow{P} \alpha$.

Fixe $\varepsilon > 0$. Tome $\gamma > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|E[X_n] - \alpha| < \varepsilon/2$ sempre que $n \geq N$. Logo $\mathbb{P}(|E[X_n] - \alpha| > \varepsilon/2) = 0$. Fazendo N maior se necessário, $Var(X_n) < \gamma \varepsilon^2/4$. Assim

$$\mathbb{P}(|X_n - \alpha| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - E[X_n] + E[X_n] - \alpha| > \varepsilon)$$

Usando técnicas similares a do exercício anterior

$$\leq \mathbb{P}(|X_n - E[X_n]| + |E[X_n] - \alpha| > \varepsilon)$$

$$\leq \mathbb{P}(|X_n - E[X_n]| > \varepsilon/2) + \mathbb{P}(|E[X_n] - \alpha| > \varepsilon/2)$$

Desigualdade de Chebyshev

$$\leq 4\, Var(X_n)/\varepsilon^2 + 0$$

$$< \gamma$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{P} \alpha.$$

3. $(A_n)_{n\geq 1}$ decresente de eventos, isto é, $A_{n+1} \subseteq A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\limsup A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n}_{A_N \cup A_{N+1} \cup A_{N+2} \cup A_{N+3} \cup \dots} = \bigcap_{N=1}^{\infty} A_N$$

contido contido contido

Note que se $\omega \in \liminf A_n$, então $\exists N \in \mathbb{N}$ com $\omega \in \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$, logo $\omega \in A_n, \forall n \geq N$. Se $\omega \in A_{N+1} \Rightarrow \omega \in A_N \subseteq \dots \subseteq A_1$. Portanto $\omega \in A_n$, $\forall n \geq 1$. Logo $\omega \in \bigcap_{n\geq 1} A_n$. A volta é trivial. Logo

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ crescente, isto é, $A_n \subseteq A_{n+1}$:

$$\liminf A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n}_{} = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$$

$\omega \in A_N \Leftrightarrow \omega \in A_n, \forall n \geq N$

Mais do que isso, $\omega \in \liminf A_n \Leftrightarrow \omega \in A_n, \forall n \geq N$.

Agora se $w \in \limsup A_n$, então $w \in \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e existe $K(N) > N$ tal que $w \in A_{K(N)} \subseteq A_{K(N)+1} \subseteq A_{K(N)+2} \subseteq \dots$ Logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $w \in A_K$, $\forall K \geq N$. Ademais, tome $w \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Assim $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $w \in A_N$ e, então $w \in A_K$, $\forall K \geq N$. Portanto $w \in \limsup A_n$. Concluo que

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

4. $$A_n = \begin{cases} [1/n, 1 + 1/n], & n \text{ ímpar}, \\ [1 - 1/n, 2 - 1/n], & n \text{ par}. \end{cases}$$

$$\limsup A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n = \bigcap_{N \text{ ímpar}} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \cap \bigcap_{N \text{ par}} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$$

$$= \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{n=2K-1}^{\infty} A_n \cap \bigcup_{n=2K}^{\infty} A_n$$

$$= \bigcap_{K=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=K}^{\infty} A_{2i-1} \cup A_{2i} \right) \cap \left(\bigcup_{i=K}^{\infty} A_{2i} \cup A_{2i+1} \right)$$

$$= \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{i=K}^{\infty} [1/2i-1, 2 - 1/2i] \cap \bigcup_{i=K}^{\infty} [1/2i+1, 2 - 1/2i]$$

$$= \bigcap_{K=1}^{\infty} (0,2) \cap (0,2) = (0,2)$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n = \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcap_{n=2K-1}^{\infty} A_n \cup \bigcap_{n=2K}^{\infty} A_n$$

$$= \bigcup_{K=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=K}^{\infty} A_{2i-1} \cap A_{2i} \right) \cup \left(\bigcap_{i=K}^{\infty} A_{2i} \cap A_{2i+1} \right)$$

$$= \bigcup_{K=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=K}^{\infty} [1 - 1/2i, 1 + 1/2i-1] \right) \cup \left(\bigcap_{i=K}^{\infty} [1 - 1/2i, 1/2i+1] \right)$$

$$= \bigcup_{K=1}^{\infty} \{1\} \cup \{1\} = \{1\}.$$

5. $X_1, X_2, \ldots$ independentes

$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$.

Vamos mostrar que $X_n \xrightarrow{P} 0$. Tome $\varepsilon > 0$. Assim

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \neq 0) = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Logo $X_n \xrightarrow{P} 0$. Note que são disjuntos

→ definição de limite

Seja $L = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to 0\}$. Se $\omega \in L$, então, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow |X_n(\omega)| < 1/m$. Como $\mathbb{P}(X_n \notin \{0,1\}) = 0$, podemos fazer $L = E \cup Z$ em que $\omega \in Z$ se $X_n(\omega) \notin \{0,1\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo $\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n \notin \{0,1\}\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \notin \{0,1\}) = 0$.

↳ indica prob de "algum desses conjuntos"

Assim:

Afinal $X_n \to 0$ em E

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L) &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(Z) \\
&= \mathbb{P}(E) \\
&= \mathbb{P}(\exists N \in \mathbb{N};\ n \geq N \Rightarrow X_n = 0\}) \\
&= \mathbb{P}(\textstyle\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} X_n = 0) \\
&\leq \textstyle\sum_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\bigcap_{n\geq N} X_n = 0) \\
\text{independência} \leftarrow &= \textstyle\sum_{N\in\mathbb{N}} \prod_{n=N}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) \\
&= \textstyle\sum_{N\in\mathbb{N}} \prod_{n\geq N} 1 - 1/n
\end{aligned}$$

Defina $a_K^N = \prod_{n=N}^{K} 1 - 1/n = \prod_{n=N}^{K} \frac{n-1}{n} = \frac{N-1}{\cancel{N}} \cdot \frac{\cancel{N}}{\cancel{N+1}} \cdot \frac{\cancel{N+1}}{\cancel{N+2}} \cdots \frac{\cancel{K-2}}{\cancel{K-1}} \cdot \frac{\cancel{K-1}}{K} = \frac{N-1}{K}$. Logo

$$\lim_{K\to\infty} a_K^N = 0$$

Assim:

$$\mathbb{P}(L) \leq \sum_{N\in\mathbb{N}} \lim_{K\to\infty} a_K^N = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X_n \to 0) = 0$$

Intuitivamente como $\mathbb{P}(X_n = 1) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, esporadicamente, $\forall N \in \mathbb{N}$, vai existir uma massa de probabilidade em $\bigcup_{n\geq N}\{X_n = 1\}$. Logo as sequências $\{X_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ vão ter esporádicos 1. Assim, por definição $X_n(\omega) \not\to 0$.

PC mudou → na verdade é questão 7 da página 28

Se $A = \lim A_n := \limsup A_n = \liminf A_n$, então $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$

Sabemos que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\limsup A_n) \geq \limsup \mathbb{P}(A_n)$
$= \mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbb{P}(A_n)$

Logo $\limsup \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(A) \leq \liminf \mathbb{P}(A_n)$ e
$\liminf \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup \mathbb{P}(A_n)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \limsup \mathbb{P}(A_n) = \liminf \mathbb{P}(A_n)$. Nesse caso, o limite existe e
$\mathbb{P}(A) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.

Obs.: Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência,

$$\limsup x_n = \inf_{N \in \mathbb{N}} \{ \sup_{n \geq N} x_n \}$$

Note que $\{ \sup_{n \geq N} x_n \}_{N \in \mathbb{N}}$ é sequência não crescente monótona. Se $x_n \geq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e algum $L \in \mathbb{R}$, $\{\sup x_n\}$ é sequência limitada. Portanto, convergente e $\limsup x_n$ está bem definido.

$$\liminf x_n = \sup_{N \in \mathbb{N}} \{ \inf_{n \geq N} x_n \}$$

Prove que para $x_n \leq L$, $L \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\liminf x_n$ está bem definido. Como, $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\inf_{n \geq N} x_n \leq \sup_{n \geq N} x_n,$$

temos que $\liminf x_n \leq \limsup x_n$. Se vale a igualdade, prove que $\lim x_n$ existe e é igual a $l = \limsup x_n$.

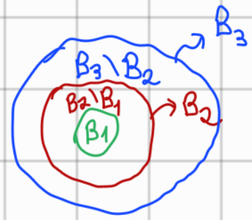
Por fim, vamos mostrar que $\liminf \mathbb{P}(A_n) \geq \mathbb{P}(\liminf A_n)$.

Defina $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Note que $B_n \subseteq B_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $\omega \in B_n$, $\omega \in A_k, \forall k \geq n$. Em particular, $\omega \in A_k, \forall k \geq n+1$. Logo $\omega \in B_{n+1}$. Intuitivamente, se A_k é uma restrição, a cada n, retiramos a restrição A_n e temos mais pontos. Defina $B_0 = \emptyset$.

Observe que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overbrace{B_n \setminus B_{n-1}}^{\text{Disjuntos}},$$

pois $B_n = B_{n-1} \cup B_n \setminus B_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.



Logo

$$
\begin{aligned}
P(\liminf A_n) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\
&= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus B_{n-1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \setminus B_{n-1}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) - P(B_{n-1}) \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} P(B_n) - P(B_{n-1}) \\
&= \lim_{N \to \infty} P(B_N) - P(B_0) = \lim_{N \to \infty} P(B_N) \\
&= \liminf_{N \to \infty} P\left(\bigcap_{k=N}^{\infty} A_k\right) \\
&\leq \liminf_{N \to \infty} P(A_N)
\end{aligned}
$$

Verifique

Sequência monótona não decrescente limitada $\Rightarrow$ convergente

$\bigcap_{k=N}^{\infty} A_k \subseteq A_N$

Agora veja que

$$
\begin{aligned}
(\limsup A_n)^c &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_k\right)^c \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_k^c \\
&= \liminf A_n^c
\end{aligned}
$$

De Morgan $\leftarrow$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow P(\limsup A_n) &= 1 - P(\liminf A_n^c) \geq 1 - \liminf P(A_n^c) \\
&= 1 - \liminf(1 - P(A_n)) = \limsup P(A_n)
\end{aligned}
$$

verificar