Soluções Lista 11
Lucas Moschen

1. Capítulo 5, problema 6

$X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes com $X_n \sim U[0, a_n]$

a) $a_n = n^2$. Defina $A_n = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) < 1\}$. Quero mostrar que

nº infinito de A_n

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$$

isto é, a probabilidade de $X_n(\omega) < 1$ somente em uma quantidade finita seja 0. Note que

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2}.$$

Com isso, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$

Resultado de Euler usando série de $\sin(x)$.

Borel Cantelli

Como isso é finito, $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. Veja que não usamos a independência aqui.

b) Agora tome $a_n = n$. Quero provar que

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1,$$

$\geq \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

Harmonic series

com $A_n = \{X_n < 1\}$. Note agora que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = +\infty$

Como $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são independentes, por Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$$

2. Capítulo 5 - Questão 7

Já resolvi essa questão na lista anterior.

3. Capítulo 5 - Questão 9

$X_1, X_2, \dots \overset{iid}{\sim} Exp(1)$.

Defina $A_n = \{X_n / \log n > 1\}$. Veja que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são independentes. Além disso, $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X_n > \log n) = e^{-\log(n)} = n^{-1}$. Com isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Por Borel Cantelli, $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Definindo $B_n = \{X_n / \log n > 2\}$, $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X_n > 2\log n) = e^{-2\log(n)} = n^{-2}$. Com isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

que implica, por Borel-Cantelli, que $\mathbb{P}(\limsup B_n) = 0$.

4. Capítulo 5 - Questão 10.

$X_1, X_2, \dots$ v.a. com $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-2}$, $\mathbb{P}(X_n = n^2) = n^{-2}$.

bom chute, né?

Vou mostrar que $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$, isto é,

$$\mathbb{P}(X_n \to 0) = 1$$

Defina $A_n = \{X_n \neq 0\}$. Assim $\mathbb{P}(A_n) = n^{-2}$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty.$$

Em particular, $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$ por Borel Cantelli e $\mathbb{P}(\liminf A_n^c) = 1$ por consequência. Com isso,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{X_n = 0\} \right) = 1.$$

Para $\omega \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{X_n = 0\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $X_n(\omega) = 0$. Logo, por definição de limite $X_n(\omega) \to 0$. Daí concluo que

$$\liminf A_n^c \subseteq \{X_n \to 0\}$$

e, portanto, $1 = \mathbb{P}(\liminf A_n^c) \leq \mathbb{P}(X_n \to 0) \leq 1$, implicando que

$$X_n \xrightarrow{q.c.} 0$$

Calculo que $E[X_n^m] = 0 \cdot (1 - 1/n^2) + n^{2m} \cdot (1/n^2) = n^{2(m-1)}$, enquanto $E[0^m] = 0$. Veja que $\forall m \geq 1$, $n^{2(m-1)} \not\to 0$ e, em particular, diverge para $m > 1$.

5. Capítulo 5 - Questão 12

$X_1, X_2, \ldots \overset{iid}{\sim} U[0,1]$.

Tome $\varepsilon \in (0,1)$. $\mathbb{P}(n^{-X_n} > \varepsilon) = \mathbb{P}(-X_n \log n > \log \varepsilon)$

$$= \mathbb{P}(X_n < -\log \varepsilon / \log n)$$

$$= -\log \varepsilon / \log n \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

pois $\log n \to +\infty$. Para $\varepsilon \geq 1$, $\mathbb{P}(n^{-X_n} > \varepsilon) = 0$. Logo

$$n^{-X_n} \xrightarrow{P} 0.$$

Fixe $\varepsilon \in (0,1)$ novamente e defina $A_n = \{n^{-X_n} > \varepsilon\}$. Assim $\mathbb{P}(A_n) = -\log \varepsilon / \log n$ como vimos anteriormente para $n \geq 2$. Assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \geq -\log \varepsilon \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n} \geq -\log \varepsilon \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Com isso, usando que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são independentes, por Borel Cantelli,

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$$

Isso significa que se $\omega \in \limsup A_n$, então, então $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq N$, tal que $n^{-X_n(\omega)} > \varepsilon$. Logo $X_n(\omega) \not\to 0$. Daí,

$$\limsup A_n \subseteq \{X_n \not\to 0\}$$

e, portanto, $P(X_n \to 0) = 0$.

6. $X(t)$ = posição da partícula em $t = 0, 1, 2, \dots$

$X(0) = 0$

a) Note que $X(2n) = P_d^{2n} - P_e^{2n}$, em que P_d^n é o nº de pulos para a direita e P_e^n para a esquerda em n passos. Se a direita é considerado sucesso, temos que

$$P_d^n \sim Bin(n, p) \quad e \quad P_e^n = n - P_d^n \sim Bin(n, 1-p).$$

Assim $X(2n) = 0 \iff P_d^{2n} = P_e^{2n} = n$.

$$P(X(2n) = 0) = \mathbb{P}(P_d^{2n} = n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

b) É fácil ver que $\mathbb{P}(X(2n+1) = 0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Defina

$$A_n = \{X(2n) = 0\} = \{P_d^{2n} = n\}$$

$$\text{Assim } \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

$$\frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{1}{n!} \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n,$$

Será que isso representa alguma série de Taylor?

para $x = p(1-p) < 1/4$, visto que $p \neq 1/2$. → Tente provar isso.

De análise, sabemos que esse somatório é a série de Taylor da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ que converge se $x < 1/4$. Logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}} < +\infty$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$ por Borel Cantelli, isto é, a prob. de $X(2n) = 0$ infinitas vezes é nula.

c) Se $p = 1/2$, o somatório é infinito. Mas como A_n não são independentes, não podemos aplicá-lo diretamente.

$$\mathbb{P}(A_2 \mid X(2) = 0) = 2p(1-p) \neq \mathbb{P}(A_2)$$