Soluções - Lista 12
Lucas Moschen

1. Capítulo 5 - problema 15

$X_1, X_2, \dots$ iid com $E[X_1] = Var(X_1) = 1$.
Defina $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e $Q_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Queremos provar que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n Q_n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.$$

Usando a lei forte dos grandes números,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} E[X_1] = 1, \quad \frac{Q_n}{n} \xrightarrow{q.c.} E[X_1^2] = Var(X_1) + E[X_1]^2 = 2$$

É natural ver que $\sqrt{\frac{Q_n}{n}} \xrightarrow{q.c.} \sqrt{2}$ e também

$$\frac{S_n}{\sqrt{nQ_n}} = \frac{S_n}{\sqrt{n^2 Q_n/n}} = \frac{S_n/n}{\sqrt{Q_n/n}} \xrightarrow{q.c.} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (*)$$

Vejamos com mais calma. Para cada $w \in \Omega$ tal que

$$Q_n(w)/n \xrightarrow{n\to\infty} 2,$$

f contínua em x se $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

é fácil ver que $\sqrt{Q_n(w)/n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2}$, pois $x \mapsto \sqrt{x}$ é função contínua. A recíproca dessa afirmativa também é válida pois $x \mapsto x^2$ é função contínua também. Logo concluímos que $\sqrt{Q_n/n} \xrightarrow{q.c.} \sqrt{2}$. Lembre também que se $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ e $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y \neq 0$, então $x_n/y_n \xrightarrow{n\to\infty} x/y$. Com esse fato, a convergência em $(*)$ vale para todo $w \in \Omega$ tal que $S_n(w)/n \to 1$ e $Q_n(w)/n \to 2$. Vejamos que isso tem probabilidade 1.

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \not\to 1 \text{ ou } \frac{Q_n}{n} \not\to 2\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \not\to 1\right) + \mathbb{P}\left(\frac{Q_n}{n} \not\to 1\right) = 0.$$

Portanto, $1 = \mathbb{P}(S_n/n \to 1, Q_n/n \to 2) \subseteq \mathbb{P}(S_n/\sqrt{nQ_n} \to 1/\sqrt{2})$, o que implica que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{nQ_n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.$$

2. Capítulo 5, problema 17

$X_1, X_2, \dots$ iid com densidade $f(x) = e^{-(x+1/2)} \mathbb{1}(x \geq -1/2)$.

$\begin{cases} 1, & x \geq -1/2 \\ 0, & x < -1/2 \end{cases}$

Defina $\mu = E[X_1]$. É fácil ver que $\mu < +\infty$.

$$\int_{-1/2}^{\infty} x e^{-(x+1/2)} dx = \int_0^{+\infty} (y - 1/2) e^{-y} dy = 1 - 1/2 = 1/2$$

Pela lei forte dos grandes números

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \to \mu \right) = 1.$$

Logo se $w \in \{S_n/n \to \mu\}$, então $S_n(w) \geq n(\mu - 1/4)$ para n suficientemente grande. Com isso $S_n(w) \to +\infty$. Portanto $w \in \{S_n \to +\infty\}$. Concluímos que $\mathbb{P}(S_n \to +\infty) = 1$.

3. Capítulo 5, problema 18

$X_1, X_2, \dots,$ iid com média μ_1 e variância $\sigma_1^2 \in (0, +\infty)$

$Y_1, Y_2, \dots,$ " " " μ_2 " " $\sigma_2^2 \in (0, +\infty)$

Independentes

Seja $M_n \overset{iid}{\sim}$ Bernoulli$(1/2)$ que simula uma moeda honesta independente das v.a.s

Defina $Z_n = M_n X_n + (1 - M_n) Y_n$ Vamos verificar que $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz o teorema de Kolmogorov.

(1) Independentes: isso vem do fato de que $\{X_n, Y_n, M_n\}$ são independentes. Defina $f(x,y,m) = mx + (1-m)y$, que é mensurável. Assim

$$\{f(X_n, Y_n, M_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

é sequência independente.

(2) Identicamente distribuídas:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_n \leq z) &= \mathbb{P}(M_n X_n + (1 - M_n) Y_n \leq z) \\
&= \mathbb{P}(X_n \leq z \mid M_n = 1) \tfrac{1}{2} + \mathbb{P}(Y_n \leq z \mid M_n = 0) \tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{1}{2} \left(\mathbb{P}(X_n \leq z) + \mathbb{P}(Y_n \leq 1/2) \right) \\
&= 1/2 \left(\mathbb{P}(X_1 \leq z) + \mathbb{P}(Y_1 \leq 1/2) \right) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq z \mid M_1 = 1) \tfrac{1}{2} + \mathbb{P}(Y_1 \leq z \mid M_1 = 0) \tfrac{1}{2} \\
&= \mathbb{P}(Z_1 \leq z),
\end{aligned}$$

o que implica que $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são iid.

(3) Integráveis: $E[|Z_n|] = E[|X_n| \mid M_n = 1] 1/2 + E[|Y_n| \mid M_n = 0] 1/2$

$= E[|X_n|] 1/2 + E[|Y_n|] 1/2 < +\infty,$

pois $E[|X_n|], E[|Y_n|] < +\infty$. Isso vem do fato que

$$\sigma_1^2 = Var(X_n) = E[X_n^2] - E[X_n]^2 \Rightarrow E[X_n^2] = \sigma_1^2 + \mu_1^2 < +\infty$$

e de forma equivalente para Y_n. Por fim $E[|X_n|] \leq 1 + E[X_n^2] < +\infty$.

(4) $E[Z_n] = E[M_n]E[X_n] + E[1 - M_n]E[Y_n]$

$= (\mu_1 + \mu_2)/2$

Concluímos que $Z_n \xrightarrow{q.c.} \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$

4. Capítulo 5, problema 19.

$X_1, X_2, \dots$ independentes com $X_k \sim Bin(n_k, p)$ com $p \in (0,1)$.

(a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim Bin(\sum_{k=1}^n n_k, p)$.

(b) Suponha que $n_k \leq \sqrt{k}$. Vejamos que satisfaz o Teorema 5.4, a primeira lei forte de Kolmogorov. A integrabilidade é certa.

$Var(X_k) = n_k p(1-p)$. Assim,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{Var(X_k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k p(1-p)}{k^2}$$

$$\leq p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}$$

$$< +\infty,$$

pelo Teste da integral:

$$\int_1^{+\infty} x^{-3/2} dx = -2x^{-1/2}\Big|_1^{+\infty} = 2 < +\infty$$

5. Capítulo 5, problema 21

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(0,1)$. A lei forte dos grandes números é

$$(1) \quad \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} \xrightarrow{g.c.} E[X_1^2] = 1.$$

$$(2) \quad \frac{(X_1-1)^2 + \dots + (X_n-1)^2}{n} \xrightarrow{g.c.} E[(X_1-1)^2] = Var(X_1-1) + E[X_1-1]^2$$
$$= Var(X_1) + 1 = 2$$

Por (1) e (2), $\frac{(1)}{(2)} \xrightarrow{g.c.} \frac{1}{2}$

6. (a) Seja $a_{mn} = \begin{cases} 2^{n-m}, & n \leq m \\ 0, & n > m \end{cases}$

$$A = (a_{mn}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1/2 & 1 & 0 & & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 0 & \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 & \ddots \\ 1/16 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$S_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=n}^{+\infty} 2^{n-m} = \sum_{K=0}^{+\infty} 2^{-K} = 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado,

$b_m = \lim a_{mn} = 0$, pois $a_{mn} = 0$, $\forall n > m$. Assim $\sum_{m=1}^{\infty} b_m = 0$ e, portanto, $2 = \lim_{n\to\infty} S_n \neq \sum_{m=1}^{\infty} b_m = 0$.

(b) Defina $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$ e $P(\{m\}) = p_m > 0$ para $m > 0$ tal que $\sum_{m=1}^{\infty} p_m = 1$. Assim (Ω, Σ, P) define um espaço de probabilidade. Também defina as variáveis aleatórias

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \ X(m) = b_m / p_m,$$
$$X_n : \Omega \to \mathbb{R}, \ X_n(m) = a_{mn} / p_m.$$

Como $a_{mn} \geq 0$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $X_n(m) \geq 0$. Além disso, $X_n(m) \uparrow X(m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, pois $a_{mn} \uparrow b_m \Rightarrow a_{mn}/p_m \uparrow b_m/p_m$, visto que $p_m > 0$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, $E[X_n] \uparrow E[X]$. Note que

$$E[X_n] = \sum_{K \in \{\frac{a_{mn}}{p_m}\}} K \cdot P(X_n = K) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{p_m} \cdot p_m = S_n \qquad E[X] = \sum_{m=1}^{\infty} b_m$$

e, portanto, $S_n \uparrow \sum_{m=1}^{\infty} b_m$.