Soluções lista 13

Lucas Moschen

1. Capítulo 16, questão 16

$F_n \to F$ fracamente e F é contínua. Nesse caso, $F_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} F(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

convergência uniforme: $\{f_n\}$ converge uniformemente para f se $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N, x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

independe de x

Tome $\varepsilon > 0$. Seja $a > 0$ tal que $F(x) < \varepsilon/4$ para $x \leq -a$ e $F(x) > 1 - \varepsilon/4$ para $x > a$. Tome $N_a \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_a$ implique

$$|F_n(-a) - F(-a)| < \varepsilon/4 \quad \text{e} \quad |F_n(a) - F(a)| < \varepsilon/4$$

Assim, se $x \leq -a$ e $n \geq N_a$,

Desigualdade triangular

$$|F_n(x) - F(x)| \leq |F_n(x) - F_n(-a)| + |F_n(-a) - F(-a)| + |F(-a) - F(x)|$$

F é não-decrescente

$$< F_n(-a) - F_n(x) + \varepsilon/4 + F(-a) - F(x)$$

$$\leq F_n(-a) + \cancel{\varepsilon/4} + F(-a)$$

$|F_n(-a)| \leq |F_n(-a) - F(a)| + |F(a)| < \varepsilon/4 + F(a)$

$$< F(-a) + \cancel{\varepsilon/4 +} \varepsilon/4 + F(-a)$$

$$< \varepsilon$$

Se $x > a$ e $n \geq N_a$,

$$|F_n(x) - F(x)| \leq |F_n(x) - F_n(a)| + |F_n(a) - F(a)| + |F(a) - F(x)|$$

$$< |(1 - F_n(x)) - (1 - F_n(a))| + \varepsilon/4 + |(1 - F(a)) - (1 - F(x))|$$

$$= (1 - F_n(a)) - (1 - F_n(x)) + \varepsilon/4 + (1 - F(a)) - (1 - F(x))$$

Usa mesmas ideias do item anterior.

$$< 1 - F(a) + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + (1 - F(a))$$

$$< \varepsilon.$$

Note que agora falta mostrar que $\sup_{x \in [-a,a]} |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ para n suficientemente grande. Seja $d = F(a) - F(-a)$. Tome K pontos em $[-a, a]$ de forma que $F(x_{i+1}) - F(x_i) < \varepsilon/5$ para $i = 0, \dots, K-1$. Para cada x_i, escolha N_i de forma que $n \geq N_i \Rightarrow |F_n(x_i) - F(x_i)| < \varepsilon/5$. Defina $N = \max\{N_i\}$. Por fim, note que para $n \geq N$,

$$|F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i)| \leq |F_n(x_{i+1}) - F(x_{i+1})| + |F(x_{i+1}) - F(x_i)| + |F(x_i) - F_n(x_i)|$$

$$< \varepsilon/5 + \varepsilon/5 + \varepsilon/5 = 3/5\,\varepsilon.$$

Juntando tudo isso, para $x \in [x_i, x_{i+1})$,

$$|F_n(x) - F(x)| \leq |F_n(x) - F_n(x_i)| + |F_n(x_i) - F(x_i)| + |F(x_i) - F(x)|$$

$$\leq |F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i)| + |F_n(x_i) - F(x_i)| + |F(x_i) - F(x)|$$

$$< 3/5\,\varepsilon + \varepsilon/5 + \varepsilon/5 = \varepsilon.$$

2. Capítulo 6, exercício 19

$X_n \overset{iid}{\sim} U[0,1]$, $Y_n = \min X_i$, $Z_n = \max X_i$, $U_n = nY_n$, $V_n = n(1-Z_n)$

a) Tome $\varepsilon > 0$. $\mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_1 > \varepsilon, \ldots, X_n > \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, fazendo $\varepsilon < 1$. Se $\varepsilon \geq 1$, $\mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Com isso

$$Y_n \xrightarrow{P} 0.$$

$$\mathbb{P}(|Z_n - 1| > \varepsilon) = \mathbb{P}(Z_n < 1 - \varepsilon \text{ ou } \underbrace{Z_n > 1 + \varepsilon}_{0,\text{ pois } X_i \leq 1})$$

$$= \mathbb{P}(X_1 < 1-\varepsilon, \ldots, X_n < 1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

fazendo $\varepsilon < 1$. Se $\varepsilon \geq 1$, $\mathbb{P}(Z_n < 1 - \varepsilon) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Com isso

$$Z_n \xrightarrow{P} 0.$$

b) Seja $W \sim Exp(1)$. Tome $x > 0$,

$$\mathbb{P}(U_n > x) = \mathbb{P}(nY_n > x)$$

seja n grande para que $x/n < 1$

$$= \mathbb{P}(X_1 > x/n, \ldots, X_n > x/n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1 - x/n)$$

$$= (1 - x/n)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-x}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$$

$$= \left[\left(1 + 1/(-n/x)\right)^{-n/x}\right]^{-x} \xrightarrow{m\to\infty} [e]^{-x}$$

$$= \mathbb{P}(W > x)$$

Logo $U_n \xrightarrow{D} W$.

$$\mathbb{P}(V_n > x) = \mathbb{P}(1 - Z_n > x/n)$$

$$= \mathbb{P}(Z_n < 1 - x/n)$$

$$= \mathbb{P}(X_1 < 1 - x/n, \ldots, X_n < 1 - x/n)$$

$$= (1 - x/n)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-x}$$

Logo $V_n \xrightarrow{D} W$.

3. $X_n \sim bin(n, p_n)$

a) $\lim np_n = \lambda > 0$. Usando a Proposição 6.3 do livro, vamos provar que

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

para cada $k = 0, 1, 2, \dots$ e $X \sim Poisson(\lambda)$.

$np_n \to \lambda \Rightarrow f(np_n) \to f(\lambda)$ se f é contínua

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(np_n)^k}{n^k} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n (1-p_n)^{-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \left[1 \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{n-k}{n}}_{\to 1}\right] \underbrace{(1-\underbrace{p_n}_{\to 0})^{-k}}_{\to 1} \underbrace{(np_n)^k}_{\to \lambda^k} \underbrace{\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}$$

$$= \mathbb{P}(X = k),$$

como queríamos provar.

b) Se $np_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\mathbb{P}(X_n = k) \to \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$.

Se $np_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $E[X_n] \to +\infty$

Defina $X_{ni} \sim Bernoulli(p_n)$, independentes para cada i; $Y_{ni} = X_{ni} - p_n$,
$X_n = \sum_{i=1}^n X_{ni}$ e $s_n^2 = Var(X_n) = \sum_{i=1}^n Var(X_{ni}) = np_n(1-p_n)$.
$= Var(Y_n)$

Lindeberg condition: $\forall \varepsilon > 0$, $\frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^n E[Y_{ni}^2 \mathbb{1}\{|Y_{ni}| \geq \varepsilon s_n\}] \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\| \quad \frac{E[Y_{n1}^2 \mathbb{1}\{|Y_{n1}| \geq \varepsilon s_n\}]}{p_n(1-p_n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Se vale isso, então $Y_n/s_n \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$. Note que se $s_n \to \infty$, por exemplo quando $1-p_n \not\to 0$, $E[Y_{ni}^2 \mathbb{1}\{|Y_{ni}| \geq \varepsilon s_n\}] = 0$ para n grande.

4. a) $\mathbb{P}(X_n = 1/n) = 1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} 0$

$g(x) = \mathbb{1}(x > 0)$

$\mathbb{E}[g(X_n)] = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, pois $X_n = 1/n \Rightarrow g(X_n) = 1$.

$\mathbb{E}[g(0)] = 0$.

Nesse caso g não é contínua, apesar de ser limitada.

b) $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$

$\mathbb{P}(X_n = n) = 1/n$

Para $x < 0$, $F_n(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$x \geq 0$, $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = n)\mathbb{1}(n \leq x)$

$$= \begin{cases} 1 - 1/n, & x \in [0, n) \\ 1, & x \geq n. \end{cases}$$

Logo $F_n(x) \longrightarrow 1$, quando $n \to \infty$. Com isso $X_n \xrightarrow{D} 0$.

$g(x) = x$ (não é limitada, apesar de contínua

$\mathbb{E}[g(X_n)] = g(0)(1 - 1/n) + g(n) \cdot 1/n = 1$

$\mathbb{E}[g(0)] = 0$.

5. Capítulo 6, problema 4

Seja $Z \sim N(0,1)$

Sabemos que $\varphi_Z^{(k)}(0) = \frac{d}{dt^k} e^{-\frac{1}{2}t^2}\Big|_{t=0} = i^k E[Z^k]$

$$\varphi_Z^{(1)}(0) = -t e^{-1/2t^2}\Big|_{t=0} = 0$$
$$\varphi_Z^{(2)}(0) = -e^{-1/2t^2} + t^2 e^{-1/2t^2}\Big|_{t=0} = -1$$
$$\varphi_Z^{(3)}(0) = te^{-1/2t^2} - t^3 e^{-1/2t^2} + 2t e^{-1/2t^2} = 0$$
$$\varphi_Z^{(4)}(0) = 3e^{-1/2t^2} - t^2 e^{-1/2t^2} + t^4 e^{-1/2t^2} - 3t^2 e^{-1/2t^2} - 2t^2 e^{-1/2t^2} = 3$$

Logo $E[Z^3] = 0$ e $E[Z^4] = 3$. Por fim

$$E[X^3] = E[(\sigma Z+\mu)^3]$$
$$= \sigma^3 E[Z^3] + 3\sigma^2\mu E[Z^2] + 3\sigma\mu^2 E[Z] + \mu^3$$
$$= 3\sigma^2\mu + \mu^3$$
$$E[X^4] = E[(\sigma Z+\mu)^4]$$
$$= \sigma^4 E[Z^4] + 4\sigma^3\mu E[Z^3] + 6\sigma^2\mu^2 E[Z^2] + 4\sigma\mu^3 E[Z] + \mu^4$$
$$= 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4$$

6. Capítulo 6, questão 20

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid tal que $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$ e seja $Y_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} X_k$.
Mostre que $Y_n \xrightarrow{D} Y$ com $Y \sim U[-1,1]$.

e^{itx_n}

Vamos aplicar o teorema 6.2. Primeiro,

$$\varphi_{X_n}(t) = \mathbb{E}[\cos(tX_n)] + i\,\mathbb{E}[\operatorname{sen}(tX_n)]$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\cos(t) + \overbrace{\cos(-t)}^{\cos(t)} + i(\operatorname{sen}(t) + \overbrace{\operatorname{sen}(-t)}^{-\operatorname{sen}(t)})\Big)$$
$$= \cos(t).$$

Pela linearidade, $\varphi_{2^{-k}X_k}(t) = \varphi_{X_k}(2^{-k}t) = \cos(2^{-k}t)$.
Pela independência $\varphi_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{2^{-k}X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos(2^{-k}t)$

$\hookrightarrow \varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{\Sigma 2^{-k}X_k}(t)$

Note que $\varphi_Y(t) = E[\cos(tY)] + i\,E[\operatorname{sen}(tY)]$

lotus $\rightarrow$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{\cos(ty)}{2}\,dy + i\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen}(ty)}{2}\,dy$$
$$= \frac{\operatorname{sen}(ty)}{2t}\Big|_{-1}^{1} - i\,\frac{\cos(ty)}{2t}\Big|_{-1}^{1}$$
$$= \begin{cases} \operatorname{sen}(t)/t, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$

Note que
$$\operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)$$
$$= 2[2\operatorname{sen}(x/4)\cos(x/4)]\cos(x/2)$$
$$= \ldots$$

Tente provar por indução

$$= 2^n \operatorname{sen}(x/2^n) \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \cos(x/2^i)}_{\varphi_{Y_n}(x)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto $\varphi_{Y_n}(t) = \dfrac{\text{sen}(t)}{2^n \,\text{sen}(t/2^n)}$

Vamos calcular $\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \text{sen}(t) \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n \,\text{sen}(t/2^n)}$

$$= \text{sen}(t) \lim_{m\to 0} \frac{m}{\text{sen}(mt)}$$

$$\overset{\text{L'Hopital}}{=} \text{sen}(t) \lim_{m\to 0} \frac{1}{t\cos(mt)} = \frac{\text{sen}(t)}{t},$$

se $t \neq 0$. Se $t = 0$, $\varphi_{Y_n}(t) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{Y_n}(t) \to \varphi_Y(t)$ e, por consequência do Teorema 6.2, $Y_n \xrightarrow{D} Y$

7. Capítulo 6, questão 32

$X_1, X_2, \dots$ iid com $E[X_1] = 0$ e $E[X_1^2] = 2$.

(a) Seja $Y_n = \sqrt{n} \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} = \dfrac{\sqrt{n}\,\bar{X}_n}{\sum X_i^2/n}$ Dividi por n $\dfrac{\sum X_i}{n}$

Pelo Teorema Central do Limite, visto no capítulo,

$$\sqrt{n}\,\bar{X}_n \to N(0, \sigma^2),$$

com $\sigma^2 = Var(X_1) = E[X_1^2] = 2$. Além do mais, pela Lei Fraca dos Grandes números

$$\sum_{i=1}^n X_i^2/n \xrightarrow{P} E[X_1^2] = 2.$$

Supondo que $P(\sum_{i=1}^n X_i^2 = 0) = \prod_{i=1}^n P(X_i = 0) = 0$, o Teorema de Slutsky diz que

$$Y_n \xrightarrow{D} N(0,2)/2 \equiv N(0, 1/2)$$

(b) $Z_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}} = \dfrac{(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}}{\sqrt{(X_1^2 + \dots + X_n^2)/n}} = \dfrac{\overbrace{\boxed{\sqrt{n}\,\bar{X}_n}}^{\xrightarrow{D} N(0,2)}}{\sqrt{\underbrace{\boxed{(X_1^2 + \dots + X_n^2)/n}}_{\to E[X_1^2] = 2}}}$ $\dfrac{\sqrt{n}}{n}$

Como $x \mapsto \sqrt{x}$ é contínua, o denominador converge para $\sqrt{2}$ em probabilidade. Aplicando Slutsky novamente, temos que

$$Z_n \xrightarrow{D} N(0,2)/\sqrt{2} \equiv N(0,1).$$

8. Capítulo 6, questão 30

$X_1, X_2, \ldots$ iid com $X_n \sim Unif(0, \theta)$ para $\theta > 0$.

Seja $Y_n = \sqrt{n}\{\log(2\bar{X}_n) - \log\theta\}$. Note inicialmente que

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta/2) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2),$$

em que $\sigma^2 = Var(X_1) = \theta^2/12$, pelo Teorema Central do Limite.

Defina $g(x) = \begin{cases} \log(2x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Note que g é diferenciável em todo ponto exceto $x = 0$. Em particular, $g'(\theta) \neq 0$. Então, pela proposição 6.8,

$$\sqrt{n}(\log(2\bar{X}_n) - \log(\cancel{2}\cdot\theta/\cancel{2})) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 g'(\theta)^2),$$

em que $g'(\theta) = \dfrac{2}{2\theta} = \dfrac{1}{\theta}$. Com isso,

$$Y_n \xrightarrow{D} N(0, 1/12)$$