**MSc Probabilidade 2023.1**

Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Paulo César P. Carvalho
Monitor Lucas Machado Moschen

# Lista 2

**Solução 1.** Para a primeira abordagem desse tipo de questão, vale a pena definir $B_k = \cap_{n=k}^{\infty} A_n$ para $k \in \mathbb{N}$ e, então $X = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$. Com isso, se $\omega \in X$, temos que $x$ pertence a uma união de conjuntos e, portanto, deve existir algum $k$ tal que $x \in B_k$. Agora se $x \in B_k$, significa que esse ponto pertence a uma intersecção de conjuntos e, por conseguinte, deve pertencer a todos. Por isso $x \in A_n$ para todo $n \geq k$. Concluo que se $x \in X$, podemos dizer que para todo $n$ suficientemente grande, $\omega \in A_n$.

É fácil observar que $B_k \subseteq B_{k+1}$ para todo $k$, visto que quando aumentos o valor de $k$, nossa intersecção de conjuntos diminui, como podemos ver na Figura 1.

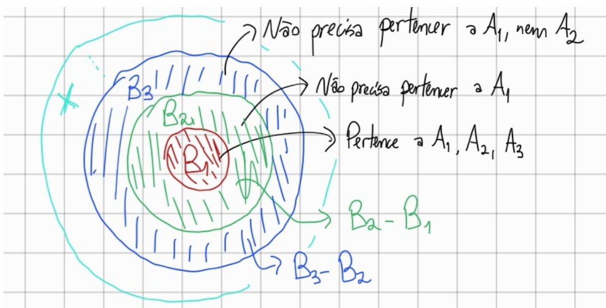


Figura 1: Inclusão de conjuntos que converge para $X$.

Além disso, $0 \leq P(B_k) \leq P(A_n)$ para todo $n \geq k$ pela propriedade da inclusão. Tomando o limite em $n$ e usando o Teorema do Sanduíche, temos que $P(B_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Concluo então que

$$0 \leq P(X) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = 0 \implies P(X) = 0.$$

**Solução 2.** Vamos provar item por item:

(a) Veja que

$$\begin{aligned} P(B|\cup A_n) &= \frac{P(B \cap \cup A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{P(\cup(B \cap A_n))}{\sum_n P(A_n)} = \frac{\sum_n P(B \cap A_n)}{\sum_n P(A_n)} \\ &= \frac{\sum_n P(B|A_n)P(A_n)}{\sum_n P(A_n)} \geq \frac{\sum_n cP(A_n)}{\sum_n P(A_n)} = c, \end{aligned}$$

em que usei o fato de que $P(B|A_n) \geq c$ para todo $n$. Vale a pena destacar que $B \cap \cup A_n = \cup B \cap A_n$ usando a propriedade distributiva da intersecção.

(b) Equivalente ao item anterior substituindo as desigualdades por igualdades.

(c) Veja que

$$P(A_{n+1}|A_n) = \frac{P(A_{n+1} \cap A_n)}{A_n} = \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} \leq \frac{1}{2},$$

que implica que $P(A_{n+1}) \leq 0.5P(A_n)$. Em particular, podemos observar que

$$P(A_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n P(A_1) \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

(d) Fazendo um pouco de contas e usando a definição da probabilidade condicional

$$\begin{aligned} P(B| \cup A_n) &= \frac{P(B \cap \cup A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{P(\cup B \cap A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{\sum P(B \cap A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{\sum P(B|A_n)P(A_n)}{P(\cup A_n)} \\ &= \frac{\sum P(C|A_n)P(A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{\sum P(C \cap A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{P(\cup C \cap A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{P(C \cap \cup A_n)}{P(\cup A_n)} \\ &= P(C| \cup A_n). \end{aligned}$$

(e) Basta usar a definição de probabilidade condicional e que

$$\sum P(B \cap A_n \cap C) = P(\cup B \cap A_n \cap C) = P(B \cap C \cap \cup A_n) = P(B \cap C).$$

**Solução 3.** Seja $A$ o evento de que o estudante acertou a questão e $S$ a de que sabia a resposta dela. Assim, $P(S) = p$, $P(A|S) = 1$ e $P(A| \sim S) = 1/m$. Estamos interessados em $P(S|A)$ que é dado por, usando Teorema de Bayes,

$$P(S|A) = \frac{P(A|S)P(S)}{P(A)} = \frac{P(A|S)P(S)}{P(A|S)P(S) + P(A| \sim S)P(\sim S)} = \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}} = \frac{1}{1 + \frac{1-p}{pm}}.$$

Com $p$ fixo, se $m \to \infty$, temos que $P(S|A) \to 1$, como esperávamos, dado que a probabilidade de acerto ao acaso cai para 0. Como $m$ fixo, se $p \to 0$, temos que

$$\frac{1-p}{p} \to \infty$$

e, portanto $P(S|A) \to 0$, o que também corrobora com o fato de que é improvável que ele saiba.

**Solução 4.** Seja $E$ o evento de que Pedro escreveu a carta e $R$ o evento de que Maria recebeu a carta. Estamos interessados em $P(\sim E| \sim R)$. Note que, usando Bayes,

$$P(\sim E| \sim R) = \frac{P(\sim R| \sim E)P(\sim E)}{P(\sim R)} = \frac{0,2}{P(\sim R)},$$

dado que $P(\sim R| \sim E) = 1$ e $P(E) = 0,8$. Temos que

$$P(\sim R) = P(\sim R|E)P(E) + P(\sim R| \sim E)P(\sim E) = 0,8P(\sim R|E) + 0,2$$

e nos resta calcular $P(\sim R|E)$. Se Pedro escreveu a carta, o correio pode ter perdido ela (probabilidade $0,1$) ou, se não perdeu, a de o carteiro não ter entregue é $0,1$ e, portanto, $0,9 \cdot 0,1 = 0,09$ a probabilidade do correio não perder, mas o carteiro não entregar. Com isso, $P(\sim R|E) = 0,1 + 0,09 = 0,19$ e chegamos na resposta

$$P(\sim E| \sim R) = \frac{0,2}{0,8 \cdot 0,19 + 0,2} \approx 0.57.$$

**Solução 5.** Os itens:

(a) Essa probabilidade é $p^k(1-p)^{n-k}$ pois cada lançamento é independente.

(b) Estamos interessados em, basicamente, ordenar $k$ caras e $n-k$ coroas, o que existe $C_k^n$ formas de fazer. Cada ordenação é um evento disjunto com probabilidade dada pelo item anterior. Assim, chegamos na probabilidade $C_k^n p^k(1-p)^{n-k}$ de obtermos $k$ caras e $n-k$ coroas.

(c) Seja $X$ a variável aleatória que conta o número de caras e $C$ o evento que o primeiro lançamento foi cara. Assim,

$$P(C|X=k) = \frac{P(X=k|C)P(C)}{P(X=k)} = \frac{C_{k-1}^{n-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} \cdot p}{C_k^n p^k(1-p)^{n-k}} = \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_k^n} = \frac{k}{n}.$$

**Solução 6.** Seguem os itens

(a) $P(\cap A_k^c) = \prod P(A_k^c) = \prod 1 - P(A_k) = \prod 1 - p_k$.

(b) $P(\cup A_k) = 1 - P((\cup A_k)^c) = 1 - P(\cap A_k^c) = 1 - \prod 1 - p_k$

(c) $P(A_1^c \cap \ldots A_k \cap \cdots \cap A_n^c) = p_k \prod_{i \neq k} 1 - p_i$ é a probabilidade de exatamente o $k$-ésimo acontecer. Assim, basta somar em $k$ para obter a probabilidade de ser exatamente 1.

(d) Similar ao item anterior, mas considerando todas as possibilidades de pares.

(e) Similar ao item (a).

(f) Se equipara a ter pelo menos um que não ocorreu, logo é similar ao item (b).