MSc Probabilidade 2023.1
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Paulo César P. Carvalho
Monitor Lucas Machado Moschen

Lista 3

Solução 1. Vamos calcular cada probabilidade usando a função de probabilidade acumulada:

- $P(0 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(0) = 1 - 0 = 1$
- $P(1 \leq X < 3) = \lim_{t \to 3^-} F_X(t) - F_X(1) = 0,65 - 0,4 = 0,25$
- $P(X = 3) = F_X(3) - \lim_{t \to 3^-} F_X(t) = 1 - 0,65 = 0,35$
- $P(X = 2) = 0$
- $P(X > 1) = 1 - F_X(1) = 0,6$
- $P(X = 3 | X > 1) = P(X = 3 \text{ e } X > 1)/P(X > 1) = P(X = 3)/P(X > 1) = 0,35/0,6 \approx 0,583$

Solução 2. Começamos pela letra (a). Note que $X = U$, $U \sim \text{Unif}(0, 1000)$, com probabilidade $5/6$ e $X = U + 500$ com probabilidade $1/6$. Assim,

$$P(X \leq x) = \frac{5}{6}P(U \leq x) + \frac{1}{6}P(U \leq x - 500).$$

Se $x \in [0, 500]$, temos que

$$P(X \leq x) = \frac{5}{6}P(U \leq x) = \frac{5x}{6000} = \frac{x}{1200}.$$

Se $x \in [500, 1000]$, temos que

$$P(X \leq x) = \frac{5}{6}P(U \leq x) + \frac{1}{6}P(U \leq x - 500) = \frac{5x}{6000} + \frac{x - 500}{6000} = \frac{6x - 500}{6000}.$$

Por fim, se $x \in [1000, 1500]$, temos que

$$P(X \leq x) = \frac{5}{6}P(X \leq x) + \frac{1}{6}P(U \leq x - 500) = \frac{5000}{6000} + \frac{x - 500}{6000} = \frac{x + 4500}{6000},$$

o que dá a nossa função de distribuição acumulada. Por fim, para $x > 1500$, $P(X \leq x) = 1$ e para $x < 0$, $P(X \leq x) = 0$.

Agora vamos para a letra (b). O processo é o mesmo, mas temos as seguintes opções, $X = 0$ com probabilidade $1/6$, $X = 1000$ com probabilidade $1/6$ e $X = U$ com probabilidade $2/3$.

$$P(X \leq x) = \frac{1}{6}\mathbb{1}_{x \geq 0} + \frac{2}{3}\frac{x}{1000}\mathbb{1}_{x \in [0,1000]} + \frac{2}{3}\mathbb{1}_{x \geq 1000} + \frac{1}{6}\mathbb{1}_{x \geq 1000}.$$

Em ambos os casos, as distribuições não são discretas, nem absolutamente contínuas, mas sim uma mistura de ambas.

Solução 3. De imediato temos que $f(x) \geq 0$ para todo x. Além disso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\, dx = -\frac{1}{1+x}\Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1.$$

(a) Se $y < c$, é claro que $F_Y(y) = 0$. Caso contrário, $F_Y(y) = F_X(y) = 1 - \frac{1}{1+y}$, isto é,

$$F_Y(y) = \left[1 - \frac{1}{1+y}\right] \mathbb{1}_{y \geq c}.$$

(b) O único ponto de salto é $y = c$. Seja $p = F_Y(c) - \lim_{t \to c^-} F(t) = 1 - \frac{1}{1+c} = \frac{c}{1+c}$. Defina $F_d(y) = p\mathbb{1}_{c \leq y}$. Essa é a parte discreta. A parte absolutamente contínua é

$$F_{ac}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq c, \\ \frac{y}{1+y} & \text{se } y > c. \end{cases}$$

A parte singular é nula nesse caso, como podemos observar.

Solução 4. Seja T o tempo de espera até o segundo sucesso em uma sequência de Bernoulli. Para que $T = t$, na t-ésima jogada tempos um sucesso e nas $t-1$ anteriores temos exatamente um sucesso. Portanto,

$$P(T = t) = \binom{t-1}{1} p^2 (1-p)^{t-2}, t = 2, 3, \ldots$$

Generalizando, nas $t - 1$ jogadas, temos que ter exatamente $k - 1$ sucessos. Logo

$$P(T = t) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}, t = k, k+1, \ldots$$

Solução 5. Seja $Z = \max(X, Y)$ com $X, Y \sim \text{Unif}(0, 1)$. Temos que

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) = z^2 \mathbb{1}_{z \in [0,1]}.$$

A segunda igualdade vem do fato de que $Z \leq z \iff X \leq z \text{ e } Y \leq z$. A terceira igualdade vem da independência dessas variáveis. A função de densidade é, portanto,

$$f_Z(z) = 2z\mathbb{1}_{z \in [0,1]}.$$