MSc Probabilidade 2023.1

Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Paulo César P. Carvalho
Monitor Lucas Machado Moschen

Lista 4

Solução 1. Considere as questões:

(a) Seja N o número de itens defeituosos entre os 100 retirados. Seja p a proporção de itens defeituosos no lote. A distribuição de N não é binomial, pois os itens da amostra não são experimentos de Bernoulli independentes com mesma probabilidade. Como a amostragem é sem reposição, $N \sim \text{HyperGeom}(T = 100.000, K = p \cdot N, n = 100)$ Entretanto, como o tamanho do lote é muito grande, a proporção de itens defeituosos aproxima a probabilidade de um item ser defeituoso e remover uma quantidade pequena de itens defeituosos não altera a distribuição no todo. Em termos matemáticos,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = k) &= \lim_{T\to\infty} \frac{\binom{pT}{k}\binom{(1-p)T}{n-k}}{\binom{T}{n}} \\
&= \binom{n}{k} \lim_{T\to\infty} \frac{(pT)!((1-p)T)!(T-n)!}{(pT-k)!((1-p)T-(n-k))!T!} \\
&= \binom{n}{k} \lim_{T\to\infty} \frac{pT\cdots(pT-k+1)\cdot((1-p)T)\cdots((1-p)T-n+k+1)}{T\cdots(T-n+1)} \\
&= \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \lim_{T\to\infty} \frac{T\cdots(T-\frac{k-1}{p})\cdot T\cdots(T-\frac{n-k-1}{1-p})}{T\cdots(T-n+1)} \\
&= \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

(b) Suponha que $N \sim \text{Bin}(100, p)$. Se $p \geq 0.06$, isto é, o lote não deveria passar pela inspeção, estamos interessados no caso em que $N \leq 2$ na amostra observada. Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N \leq 2) &= \mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(N = 1) + \mathbb{P}(N = 2) \\
&= (1-p)^{100} + 100 \cdot p(1-p)^{99} + 4950 \cdot p^2(1-p)^{98}.
\end{aligned}
$$

Intuitivamente, quando maior a proporção de itens defeituosos, maiores as chances de observarmos um item defeituoso na nossa amostra. Por isso, argumentarmos que quando $p = 0.06$, teremos uma cota superior para $\mathbb{P}(N \leq 2)$. Outra forma de ver isso é olhando a derivada dessa função:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{P}(N \leq 2)}{dp} &= -100(1-p)^{99} + 100(1-p)^{99} - 9900p(1-p)^{98} + 9900p(1-p)^{98} \\
&\quad - 4950 \cdot 98p^2(1-p)^{97} \\
&= -4950 \cdot 98p^2(1-p)^{97} < 0, \forall p \in (0, 1).
\end{aligned}
$$

Com isso, sabemos que a fórmula será máxima em $p = 0.06$. Assim,

$$
\mathbb{P}(N \leq 2) \leq 0.0567.
$$

(c) Usando a distribuição de Poisson,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N \leq 2) &= \mathbb{P}(N=0) + \mathbb{P}(N=1) + \mathbb{P}(N=2) \\ &= e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \lambda^2 e^{-\lambda}/2 \\ &\leq e^{-6}(1+6+18) \approx 0.062.\end{aligned}$$

Solução 2. Para N fixo, a probabilidade de um ponto cair num intervalo de tamanho x é $p_x = x/N$ e para y é $p_y = y/N$. Cada ponto pode, portanto, cair no intervalo de tamanho x, no de tamanho y, ou no conjunto de tamanho $N-x-y$. Com isso, temos que

$$\mathbb{P}(X=m, Y=n) = \frac{N!}{m!n!(N-m-n)!} p_x^m p_y^n (1-p_x-p_y)^{N-m-n}.$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=m) &= \sum_{k=0}^{N-m} \mathbb{P}(X=m, Y=k) \\ &= \frac{N!}{m!} p_x^m \sum_{k=0}^{N-m} \frac{1}{k!(N-m-k)!} p_y^k (1-p_x-p_y)^{N-m-k} \\ &= \frac{N!}{m!(N-m)!} p_x^m \sum_{k=0}^{N-m} \frac{(N-m)!}{k!(N-m-k)!} p_y^k (1-p_x-p_y)^{N-m-k} \\ &= \frac{N!}{m!(N-m)!} p_x^m (p_y + (1-p_x-p_y))^{N-m} \\ &= \frac{N!}{m!(N-m)!} p_x^m (1-p_x)^{N-m},\end{aligned}$$

em que o Teorema Binomial foi utilizado na penúltima igualdade. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=n|X=m) &= \frac{\frac{N!}{m!n!(N-m-n)!} p_x^m p_y^n (1-p_x-p_y)^{N-m-n}}{\frac{N!}{m!(N-m)!} p_x^m (1-p_x)^{N-m}} \\ &= \frac{(N-m)!}{n!(N-m-n)!} p_y^n \frac{(1-p_x-p_y)^{N-m-n}}{(1-p_x)^{N-m}} \\ &= \frac{(N-m)!}{n!(N-m-n)!} \frac{p_y^n}{(1-p_x)^n} \frac{(1-p_x-p_y)^{N-m-n}}{(1-p_x)^{N-m-n}} \\ &= \binom{N-m}{n} \left(\frac{p_y}{1-p_x}\right)^n \left(\frac{1-p_x-p_y}{1-p_x}\right)^{N-m-n} \\ &= \binom{N-m}{n} \left(\frac{p_y}{1-p_x}\right)^n \left(1 - \frac{p_y}{1-p_x}\right)^{N-m-n},\end{aligned}$$

o que implica que $Y|X=m \sim \text{Bin}\left(N-m, \frac{y}{N-x}\right)$. Também sabemos, como já calculamos para X, que $Y \sim \text{Bin}\left(N, \frac{y}{N}\right)$.

Por fim,

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(Y=n|X=m) &= \lim_{N\to\infty}\binom{N-m}{n}\left(\frac{p_y}{1-p_x}\right)^n\left(1-\frac{p_y}{1-p_x}\right)^{N-m-n}\\
&= \frac{y^n}{n!}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N-m}{N-x}\cdots\frac{N-m-n+1}{N-x}\right)\left(1-\frac{y}{N-x}\right)^{-m-n}\left(1-\frac{y}{N-x}\right)^{N}\\
&= \frac{y^n}{n!}e^{-y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(Y=n) &= \lim_{N\to\infty}\binom{N}{n}p_y^n(1-p_y)^{N-n}\\
&= \frac{y^n}{n!}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N}{N}\cdots\frac{N-n+1}{N}\right)\left(1-\frac{y}{N}\right)^{-n}\left(1-\frac{y}{N}\right)^{N}\\
&= \frac{y^n}{n!}e^{-y},
\end{aligned}$$

o que confirma que $\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(Y=n|X=m)=\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(Y=n)$.
Observação: os resultados também podiam ser observados intuitivamente. Por exemplo, é claro que X tem distribuição binomial, pois cada ponto é um experimento de Bernoulli com probabilidade p_x de cair no intervalo correspondente. Um raciocínio similar serve para a distribuição de $Y|X=m$.

Solução 3. Seja $T\sim\text{Exp}(\lambda)$.

(a) Vamos provar a falta de memória,

$$\mathbb{P}(T>t+s|T>t)=\frac{\mathbb{P}(T>t+s,T>t)}{\mathbb{P}(T>t)}=\frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda s}=\mathbb{P}(T>s),$$

desde que $s,t>0$, pois $\{T>t+s\}\subseteq\{T>t\}$.

(b) No primeiro item, estamos interessados em

$$\mathbb{P}(T<1)=1-e^{-\lambda}=1-e^{-3}.$$

No segundo item,

$$\mathbb{P}(T\in[1,1+1/3])=\mathbb{P}(T>1)-\mathbb{P}(T>1+1/3)=e^{-3}-e^{-3-3/3}=e^{-3}(1-e^{-1}).$$

Solução 4. Seguindo o enunciado, vemos que

(a) $X_t\sim\text{Poisson}(10t)$, pois modelamos o processo de emissão como Poisson. Nesse caso,

$$\mathbb{P}(X_t=k)=\frac{(10t)^k}{k!}e^{-10t}.$$

(b) Vamos calcular a distribuição de Y_t para $t>0$. Para calcular a probabilidade de k partículas terem sido registradas, temos que analisar que, se foram emitidas n partículas, qual a probabilidade de k delas atingirem o contador. Cada partícula é independente e atinge o contador com probabilidade $1/10$, portanto, dado que foram emitidas n partículas, temos uma distribuição binomial. Portanto, usando a probabilidade total,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_t = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = n) \cdot \mathbb{P}(k \text{ de } n \text{ terem atingido}|X_t = n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(10t)^n}{n!} e^{-10t} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-10t}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} t^n \frac{1}{(n-k)!} 9^{n-k} \\
&= \frac{e^{-10t}}{k!} t^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(9t)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-10t}}{k!} t^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(9t)^m}{m!} = \frac{e^{-10t}}{k!} t^k e^{9t} = \frac{t^k}{k!} e^{-t},
\end{aligned}$$

o que implica que $Y_t \sim \text{Poisson}(t)$.

Solução 5. Defina

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{P}(X \le t + \Delta t | X > t)}{\Delta t}$$

(a) Pensando em probabilidade em proporção, para cada t, para aqueles equipamentos que estão funcionando até o tempo t, a taxa de filha indica quantos falham em um adicional de Δt por unidade de tempo, quando a unidade de tempo é muito pequena.

(b) Usando a definição de probabilidade condicional,

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{P}(X \in [t, t + \Delta t])}{\mathbb{P}(X > t)\Delta t} = \frac{1}{1 - F(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

pois $f(t) = F'(t)$.

(c) Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $h(t) = \lambda e^{-\lambda t}/e^{-\lambda t} = \lambda$.

(d) Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}
h(t) &= -\frac{F'(t)}{F(t) - 1} = -\frac{d}{dt} \log(|F(t) - 1|) \\
\implies & -\int_0^t h(s)\, ds = \log(1 - F(t)) - \log(1 - F(0)) \\
\implies & F(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t h(s)\, ds\right\}.
\end{aligned}$$

(e) Se $h(t) = at$, então,

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t as\, ds\right\} = 1 - \exp\{-at^2/2\} \implies f(t) = at \exp\{-at^2/2\}.$$

Solução 6. Ao exercício:

(a) Seja a função
$$F(x,y) = (1 - e^{-x-y})\mathbb{1}_{x \geq 0, y \geq 0}.$$
Podemos verificar que F é não decrescente e contínua a direita em cada componente. Além disso, podemos verificar que os limites de F respeitam uma distribuição de probabilidade. Seja $I_1 = (x_1, y_1)$ e $I_2 = (x_2, y_2)$ intervalos da reta não negativa não vazios. Assim, $e^{-x_i} > e^{-y_i}$ para $i = 1, 2$. Com isso, vale que
$$\begin{aligned}
&e^{-x_1}(e^{-x_2} - e^{-y_2}) > e^{-y_2}(e^{-x_2} - e^{-y_2}) \\
&\implies 1 - e^{-x_1-y_2} - (1 - e^{-x_1-x_2}) > 1 - e^{-y_1-y_2} - (1 - e^{-y_1-x_2}) \\
&\implies 0 > F(y_1, y_2) - F(y_1, x_2) - (F(x_1, y_2) - F(x_1, x_2)),
\end{aligned}$$
o que viola a propriedade F4.

(b) Note que $F(x,y) = G(x)G(y)$ com G sendo a função de distribuição de $X \sim \text{Exp}(1)$. Com isso, F é não decrescente e contínua a direita em cada componente, dado que herda essas propriedades de G. Além disso, é claro que se $x, y \to \infty$, vale que $G(x), G(y) \to 1$ e portanto $F(x,y) \to 1$. E se $x \to -\infty$ ou $y \to -\infty$, teremos que $G(x) \to 0$ ou $G(y) \to 0$, implicando que $F(x,y) \to 0$. Por fim, sendo $I_1 = (x_1, y_1)$ e $I_2 = (x_2, y_2)$,
$$\begin{aligned}
F(y_1, y_2) - F(y_1, x_2) &- (F(x_1, y_2) - F(x_1, y_2)) \\
&= G(y_1)(G(y_2) - G(x_2)) - G(x_1)(G(y_2) - G(x_2)) \\
&= (G(y_1) - G(x_1))(G(y_2) - G(x_2)) \geq 0,
\end{aligned}$$
p ois G é não decrescente. Isso mostra que F satisfaz F1—F4 e é uma função de distribuição, portanto.