MSc Probabilidade 2023.1
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Paulo César P. Carvalho
Monitor Lucas Machado Moschen

Lista 5

Solução 1. Por definição, temos que a função de distribuição de (X, X) é

$$F(x,y) = \Pr(X \le x, X \le y) = \Pr(X \le \min(x,y)) = \max(0, \min(1,x,y)), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Solução 2. Primeiro fazemos a questão 18:

(a) Note que $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1/6 \cdot \mathbb{1}(i \neq j)$

(b) $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) = 1/2$.

Já para a questão 25, $\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1/3$ para cada $i = 1, 2, 3$. Também vale que $\mathbb{P}(Y = j) = 1/3$ para cada $j = 1, 2, 3$. Com isso, X e Y não são independentes.

Solução 3. Seja $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ para $i = 1, 2$, com $\mathbb{P}(E = i) = 1/2$ para $i = 1, 2$, em que E é o evento da escolha da máquina.

(a) A função de distribuição de T é dada por

$$\mathbb{P}(T \le x) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_1 \le x | E = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_2 \le x | E = 2) = 1 - \frac{e^{-\lambda_1 x} + e^{-\lambda_2 x}}{2},$$

cuja densidade é $f(x) = F'(x) = \left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\right)/2$.

(b) Estamos interessados em $\mathbb{P}(E = 1 | T > 100)$, que é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E = 1 | T > 100) &= \mathbb{P}(T > 100 | E = 1)\frac{\mathbb{P}(E = 1)}{\mathbb{P}(T > 100)} \\
&= \mathbb{P}(T_1 > 100 | E = 1)\frac{1/2}{\frac{e^{-100\lambda_1} + e^{-100\lambda_2}}{2}} \\
&= \frac{e^{-100\lambda_1}}{e^{-100\lambda_1} + e^{-100\lambda_2}} = \frac{1}{1 + e^{-100(\lambda_2 - \lambda_1)}}.
\end{aligned}$$

(c) Nesse caso, $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Solução 4. Primeiro resolvemos o problema 36. Sejam $X_i \sim \text{Exp}(\alpha_i)$ independentes.

(a) Seja $Y = \min X_i$. Assim,

$$\mathbb{P}(Y > t) = \mathbb{P}(X_i > t, i = 1, \ldots, n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\alpha_i t} = e^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t},$$

o que implica que $Y \sim \text{Exp}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)$, em que a primeira igualdade vem do fato de que se o mínimo é maior que t, então todos também serão. Em contrapartida se todos são maiores que t, o mínimo, que é um deles, também será.

(b) Para $k = 1, \dots, n$,

$$\mathbb{P}(X_k = Y) = \mathbb{P}(X_k \leq X_i, i = 1, \dots, n) = \mathbb{P}(X_k \leq \min_{i \neq k} X_i) = \mathbb{P}(X_k \leq Z_k),$$

em que $Z_k = \min_{i \neq k} X_i$. Note que Z_k e X_k são independentes pois Z_k é função de variáveis aleatórias independentes de X_k. Portanto, a densidade conjunta pode ser escrita como $f_{X_k,Z_k}(x,y) = f_{X_k}(x) f_{Z_k}(y)$. Além disso, $Z_k \sim \text{Exp}(\sum_{i \neq k} \alpha_i)$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_k - Z_k \leq 0) &= \int_0^\infty \int_x^\infty f_{X_k,Z_k}(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^\infty \int_x^\infty \alpha_k \left(\sum_{i \neq k} \alpha_i \right) e^{-\alpha_k x} e^{-\sum_{i \neq k} \alpha_i y}\, dy\, dx \\
&= \alpha_k \int_0^\infty e^{-\alpha_k x} e^{-\sum_{i \neq k} \alpha_i x}\, dx \\
&= \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n},
\end{aligned}$$

o que queríamos provar.

Agora vamos para o exercício 40.

(a) É um processo de Poisson com taxa média de entrada de 25 fregueses por minuto, que é a soma das entradas, que são independentes, das duas portas.

(b) Temos que

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(X_t^A = 0) = e^{-15t} \implies T_1 \sim \text{Exp}(15).$$

Seguindo o mesmo raciocício $V_1 \sim \text{Exp}(10)$ e, além disso, usando o exercício anterior, $\min(T_1, V_1) \sim \text{Exp}(25)$.

(c) Estamos interessados em $\mathbb{P}(T_1 \leq V_1)$, em que T_1 e V_1 são independentes. Como calculamos no exercício anterior, $\mathbb{P}(T_1 \leq V_1) = 15/25 = 3/5$.

Solução 5. Considere A o triângulo delimitado por $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$.

(a) $c = 1/\operatorname{vol}(A) = 2$.

(b) $f_X(x) = \int_0^{1-x} 2\, dy = 2(1-x)$ e $f_Y(y) = \int_0^{1-y} 2\, dx = 2(1-y)$ para $x, y \in [0,1]$. Por fim, usando o resultado do capítulo 2.6 do livro,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-t, t)\, dt = \int_0^z f(z-t,t)\, dt = 2z \cdot I_{[0,1]}(z).$$

(c) X e Y não são independentes, pois o produto de suas densidades não resulta na densidade conjunta.

Solução 6. Seja

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{0<y<x}.$$

(a) É claro que $f_{X,Y} \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Agora note que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^\infty \int_0^x e^{-x}\, dy\, dx \int_0^\infty x e^{-x}\, dx = 1,$$

o que prova que f é uma densidade. A região é a delimitada pelas retas $y = 0$ e $y = x$.

(b) Como a função $\mathbb{1}_{0<y<x}$ não é fatorável nas variáveis x e y, então X e Y não podem ser independentes.

(c) $f_X(x) = \int_0^x e^{-x}\, dy = x \cdot e^{-x}$ para $x > 0$ e 0 caso contrário. Logo $X \sim \text{Gamma}(2, 1)$.

Solução 7. Defina a função

$$g(x, y) := \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right),$$

cuje inversa é dada por

$$h(u, v) = \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}}\right).$$

O Jacobiano da transformação é

$$J(x, y, u, v) = \det \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(-2) = -1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(h(u, v)) &= f_X\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{4}(u+v)^2\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{4}(u-v)^2\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{4}(u^2+2uv+v^2)\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{4}(u^2-2uv+v^2)\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\},
\end{aligned}$$

o que implica que U e V são independentes e normalmente distribuídos com parâmetros 0 e 1.

Solução 8. Seja $X, Y \sim U[0, 1]$ independentes, $R = \sqrt{2\log(1/(1-X))}$ e $\Theta = \pi(2Y - 1)$.

(a) Usando o método jacobiano, vemos que

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} f_Y\left(\frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}[-\pi, \pi] \implies \Theta \sim U[-\pi, \pi].$$

$$f_R(r) = f_X\left(1 - e^{-\frac{r^2}{2}}\right) re^{-\frac{r^2}{2}} = re^{-\frac{r^2}{2}} \mathbb{1}_{[0,1]}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{2}}\right).$$

Note que $r \geq 0$ para que $1 - e^{-\frac{r^2}{2}} \geq 0$ e $1 - e^{-\frac{r^2}{2}} \leq 1$ para todo r. Então,

$$f_R(r) = re^{-\frac{r^2}{2}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(r).$$

(b) O jacobiano da inversa dessa transformação é

$$J((z, w), (\theta, r)) = \det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} = r$$

Portanto, usando que $Z^2 + W^2 = R^2$,

$$\begin{aligned}
f_{Z,W}(z, w) &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}(-\pi \leq \theta(z, w) \leq \pi) r(z, w) e^{-r(z,w)^2/2} \mathbb{1}(r(z, w) \geq 0)/r(z, w) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2},
\end{aligned}$$

o que mostra que $Z, W \overset{iid}{\sim} N(0, 1)$