MSc Probabilidade 2023.1
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Paulo César P. Carvalho
Monitor Lucas Machado Moschen

Lista 6

Solução 1. Seja X uma variável aleatória com densidade $f(x)$.

(a) A função de distribuição de $Y = |X|$ é

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(|X| \leq y) = \mathbb{P}(-y \leq X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y) - \mathbb{P}(X \leq -y) = F_X(y) - F_X(-y),$$

para $y \geq 0$ e $F_Y(y) = 0$ caso contrário. Assim, a densidade de Y é

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} f(y) + f(-y), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}.$$

(b) Usando o método do jacobiano, primeiro temos que notar que $g(x) = |x|$ é não diferenciável em $x = 0$, mas diferenciável em todo resto. Além disso, ela também não é bijetiva. Por esse motivo, temos que separar o domínio da função em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Quando $x < 0$, a função $g_-(x) = -x$ é bijetiva e diferenciável. O mesmo ocorre para $g_+(x) = x$ para $x > 0$ que é bijetiva e diferenciável. O módulo do jacobiano de ambas é 1 e, portanto,

$$f_Y(y) = f(-y) \cdot |-1| + f(y) \cdot |1| = f(-y) + f(y), y > 0.$$

Para $y = 0$, podemos colocar qualquer valor não negativo. Fazemos $f_Y(0) = 2f(0)$ por escolha. Assim,

$$f_Y(y) = \begin{cases} f(y) + f(-y), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}.$$

Solução 2. Considere a densidade conjunta

$$f(x, y, z) = \frac{6}{(1 + x + y + z)^4} \mathbb{1}(x > 0, y > 0, z > 0).$$

Vamos obter a densidade de $W = X + Y + Z$. Temos que a distribuição de W é

$$\begin{aligned}
F_W(w) = \mathbb{P}(X + Y + Z \leq w) &= \int_0^w \int_0^{w-x} \int_0^{w-x-y} \frac{6}{(1 + x + y + z)^4} \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_0^w \int_0^{w-x} \int_{1+x+y}^{1+w} \frac{6}{u^4} \, du \, dy \, dx = \int_0^w \int_0^{w-x} \frac{2}{(1 + x + y)^3} - \frac{2}{(1 + w)^3} \, dy \, dx \\
&= \int_0^w \int_{1+x}^{1+w} \frac{2}{u^3} - \frac{2}{(1 + w)^3} \, du \, dx \\
&= \int_0^w \frac{1}{(1 + x)^2} - \frac{1}{(1 + w)^2} - \frac{2}{(1 + w)^2} + \frac{2(1 + x)}{(1 + w)^3} \, dx \\
&= 1 - \frac{1}{1 + w} - \frac{w}{(1 + w)^2} - \frac{2w}{(1 + w)^2} + \frac{1}{1 + w} - \frac{1}{(1 + w)^3} = \frac{w^3}{(1 + w)^3}.
\end{aligned}$$

Com isso,

$$f_W(w) = F'_W(w) = 3\frac{w^2}{(1+w)^4}.$$

Usando o método de jacobi, introduza a transformação $g(x, y, z) = (x, y, x + y + z)$ que é bijetiva (inversa $g^{-1}(x, y, w) = (x, y, w - x - y)$) e $U = g(X, Y, Z)$. A jacobiana de g^{-1} é

$$J = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Sendo $u = (x, y, w)$, o método de Jacobi implica que

$$f_U(u) = f(x, y, w - x - y) \cdot 1 = \frac{6}{(1+w)^4},$$

para $w > x + y$ e 0 caso contrário. Portanto,

$$f_W(w) = \int_0^w \int_0^{w-x} f_U(u)\, dy\, dx = \int_0^w \int_0^{w-x} \frac{6}{(1+w)^4}\, dy\, dx = \int_0^w \frac{6(w-x)}{(1+w)^4}\, dx = \frac{3w^2}{(1+w)^4},$$

que corrobora com a solução anterior.

Solução 3. Seja X o número de retiradas necessárias a fim de observemos uma bola duas vezes.

(a) Se $X > k$, significa que retiramos k bolas diferentes (note que pelo princípio da casa dos pombos, $X \leq n$ e $X \geq 2$, pois precisamos retirar pelo menos duas bolas). Sabendo disso, para $k = 2, \dots, n-1$, temos que

$$\mathbb{P}(X > k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!n^k},$$

isto é, temos n^k formas diferentes de tirar k bolas de n. Logo, a distribuição de X é

$$\mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}$$

(b) Podemos calcular

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = 2 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} n - i}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n-1} \prod_{i=0}^{k-1} 1 - \frac{i}{n} = 2 + \sum_{k=2}^{n-1} \prod_{i=1}^{k-1} 1 - \frac{i}{n},$$

como queríamos mostrar.

Solução 4. Note que cada lançamento de dado é um experimento de Bernoulli com probabilidade 1/3 (tirar 1 ou 6 entre 6 resultados) e eles são independentes. Seja X o número de lançamentos necessários para se tirar 1 ou 6. Com isso $X \sim \text{Geom}(1/3)$. Note que com 3 lançamentos, o gasto é de R\$55,00 e, portanto, o jogador teve prejuízo. Portanto, a probabilidade de lucro é

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 1/3 + 2/3 \cdot 1/3 = 5/9.$$

Com isso, ele tem mais chance de lucro. O lucro esperado é calculado da seguinte forma: seja Y o lucro do jogador. Assim, $Y = 50 - 15X - 10 = 40 - 15X$ e, portanto,

$$\mathbb{E}[Y] = 40 - 15\mathbb{E}[X] = 40 - 15 \cdot 3 = -5,$$

isto é, o lucro esperado é negativo.

Solução 5. Seja X_n o valor que o jogador I tem após a rodada n. Veja que $X_n \in \{0, 100, 200, 300, 400\}$, $X_0 = 200$ e $|X_{n+1} - X_n| = 100$ para todo $n \geq 0$. Estamos interessados em

$$N = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = 0 \text{ ou } X_n = 400\}.$$

Seja v_k o número esperado de lançamentos até terminar o jogo dado que $X_0 = k$. Estamos interessado em $v_{200} = \mathbb{E}[N]$. Note que $v_0 = v_{400} = 0$. O número esperado de lançamentos começando de 300 é o lançamento a ser feito nessa rodada mais uma entre as seguintes duas opções: com probabilidade p, o jogador I atinge 400 e tem v_{400} lançamentos a serem feitos em média ou atinge 200 e v_{200} com probabilidade $1-p$. O simétrico ocorre quando se começa de 100 e, usando um raciocínio similar, calculamos v_0. Temos, então,

$$\begin{aligned} v_{300} &= 1 + pv_{400} + (1-p)v_{200} = 1 + (1-p)v_{200} \\ v_{100} &= 1 + pv_{200} + (1-p)v_0 = 1 + pv_{200} \\ v_{200} &= 1 + pv_{300} + (1-p)v_{100} \end{aligned},$$

que resulta na expressão

$$\begin{aligned} v_{200} &= 1 + p(1 + (1-p)v_{200}) + (1-p)(1 + pv_{200}) \\ &= 1 + p + p(1-p)v_{200} + 1 - p + p(1-p)v_{200} \\ &= 2 + 2p(1-p)v_{200} \implies v_{200} = \frac{2}{1 - 2p(1-p)} \end{aligned}$$

Agora seja h_k a probabilidade de $X_n = 400$ antes do que $X_n = 0$, isto é, o jogador I ser vencedor dado que $X_0 = k$. Estamos interessado em h_{200}. Note que $h_0 = 0$ e $h_{400} = 1$. Seguindo um raciocínio similar ao anterior,

$$\begin{aligned} h_{300} &= ph_{400} + (1-p)h_{200} = p + (1-p)h_{200} \\ h_{100} &= ph_{200} + (1-p)h_0 = ph_{200} \\ h_{200} &= ph_{300} + (1-p)h_{100} \end{aligned},$$

que resulta na expressão

$$\begin{aligned} h_{200} &= p(p + (1-p)h_{200}) + (1-p)(ph_{200}) \\ &= p^2 + p(1-p)h_{200} + p(1-p)h_{200} \\ &= p^2 + 2p(1-p)h_{200} \implies h_{200} = \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)}, \end{aligned}$$

o que nos dá a probabilidade do jogador I vencer.