MSc Probabilidade 2023.1

Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Paulo César P. Carvalho
Monitor Lucas Machado Moschen

Lista 7

Solução 1. Seja X uma variável com densidade

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

Pelo Teorema 3.1, temos que

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\, dx = \frac{1}{e^x+1} + \log(e^x+1)\Big|_{-\infty}^{\infty},$$

que diverge. Agora, vamos encontrar a densidade de $y = e^x$, cuja inversa é $x = \log y$. Pelo método do Jacobino,

$$f_Y(y) = \frac{e^{-\log(y)}}{(1+e^{-\log(y)})^2}\frac{1}{y} = \frac{y^{-2}}{(1+y^{-1})^2} = \frac{1}{(y+1)^2}$$

Assim,

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{\infty} \frac{y}{(y+1)^2}\, dy = \frac{1}{1+y}$$

que também diverge.

Solução 2. Na lista 3, fizemos um exercício similar, mas com o objetivo de encontrar a f.d.a. Como a variável só toma valores não negativos, podemos usar a f.d.a e o Corolário 1 da página 112 que diz que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)]\, dx.$$

Seja $U \sim \text{Unif}[0, 1000]$ o valor ganho na roleta. Temos que o candidato ganha U com probabilidade $5/6$ e $U + 500$ com probabilidade $1/6$. Com isso, se X é o prêmio recebido, Como $F_X(x) = \frac{5}{6}\mathbb{P}(U \le x) + \frac{1}{6}\mathbb{P}(U \le x - 500)$ para $x \in [0, 1500]$, e 1 para $x > 1500$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^{1500} 1 - \frac{5}{6}\mathbb{P}(U \le x) - \frac{1}{6}\mathbb{P}(U \le x - 500)\, dx \\
&= 1500 - \frac{5}{6}\int_0^{1000} \frac{x}{1000}\, dx - \frac{5}{6}500 - \frac{1}{6}\int_{500}^{1500} \frac{x-500}{1000}\, dx \\
&= \frac{6500}{6} - \frac{5}{6}500 - \frac{1}{6}500 = \frac{1750}{3}
\end{aligned}$$

Vamos fazer de uma maneira alternativa, através de esperança condicional,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{5}{6}\mathbb{E}[U] + \frac{1}{6}\mathbb{E}[U + 500] = \frac{2500}{6} + \frac{1000}{6} = \frac{1750}{3}.$$

Vamos usar esse conceito para resolver o (b). Assim:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}1000 + \frac{4}{6}\mathbb{E}[U] = \frac{3000}{6} = 500.$$

Solução 3. Seja X uma variável integrável qualquer. Portanto $\mathbb{E}[X]$ está bem definida. Assim, usando a linearidade do valor esperado,

$$\mathbb{E}[(X-c)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2c\mathbb{E}[X] + c^2.$$

Queremos resolver o seguinte problema:

$$\min \mathbb{E}[X^2] - 2c\mathbb{E}[X] + c^2 \text{ s.a. } c \in \mathbb{R}.$$

Como queremos minimizar um polinômio com coeficiente positivo, minizamos ele com

$$c^* = \mathbb{E}[X].$$

Para quando $X \sim \text{Unif}[a,b]$, $c^* = (a+b)/2$.

Solução 4. Lembre que $X \leq Y$ implica que $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$. Com isso, obtemos que $a \leq X \leq b$ implica $a = \mathbb{E}[a] \leq \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[b] = b$. Além do mais, usando o problema anterior, sabemos que $\text{Var}(X)$ é conta inferior, para valores de c, de $\mathbb{E}[(X-c)^2]$. Portanto,

$$\text{Var}(X) \leq \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] = \frac{(b-a)^2}{4},$$

pois $X \leq b$ e fazendo $0 \leq a < b$. Seja agora $a < b$ valores quaisquer. Defina $Y = X - a$ e teremos $Y \in [0, b-a]$. Note que $b - a > 0$ independente do sinal de a. Assim,

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) \leq \frac{(b-a-0)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Solução 5. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, então X^2 e Y^2 também são independentes. Assim,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(XY) &= \mathbb{E}[(XY - \mathbb{E}[XY])^2] \\
&= \mathbb{E}[(XY - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y])^2] \\
&= \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2\mathbb{E}[Y]^2 \\
&= \left(\text{Var}(X) + \mathbb{E}[X]^2\right)\left(\text{Var}(Y) + \mathbb{E}[Y]^2\right) - \mathbb{E}[X]^2\mathbb{E}[Y]^2 \\
&= \text{Var}(X)\,\text{Var}(Y) + \mathbb{E}[Y]^2\,\text{Var}(X) + \mathbb{E}[X]^2\,\text{Var}(Y).
\end{aligned}$$

Solução 6. Sejam $X, Y \sim \text{Unif}[0,1]$ independentes e defina $W = \min(X,Y)$ e $Z = \max(X,Y)$. Sabemos de capítulos anteriores que

$$f_{W,Z}(w,z) = 2\mathbb{1}(w \leq z).$$

Assim, por LOTUS,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[WZ] &= \int_0^1 \int_0^1 wz2\mathbb{1}(w \leq z)\,dw\,dz \\
&= 2\int_0^1 \int_0^z wz\,dw\,dz \\
&= \int_0^1 z^3\,dz = 1/4.
\end{aligned}$$

Ademais,

$$\mathbb{E}[W] = \int_0^1 \int_0^z 2w \, dw \, dz = 1/3, \mathbb{E}[Z] = \int_0^1 \int_0^z 2z \, dw \, dz = 2/3,$$

o que implica que $Cov(W,Z) = \mathbb{E}[WZ] - \mathbb{E}[W]\mathbb{E}[Z] = 1/4 - 2/9 = 1/36$. Por fim, calculamos

$$\mathbb{E}[W^2] = \int_0^1 \int_0^z 2w^2 \, dw \, dz = 1/6, \mathbb{E}[Z^2] = \int_0^1 \int_0^z 2z^2 \, dw \, dz = 1/2,$$

que implica $\text{Var}(W) = \mathbb{E}[W^2] - \mathbb{E}[W]^2 = 1/6 - 1/9 = 1/18$ e $\text{Var}(Z) = 1/2 - 4/9 = 1/18$. Então,

$$\rho(W,Z) = \frac{1/36}{\sqrt{1/18 \cdot 1/18}} = \frac{18}{36} = 1/2.$$

Solução 7. Seja $X = X_1 + \cdots + X_n$, em que $X_i = 1$ se na i-ésima retirada, tiramos um dos r objetos de interesse, e 0 caso contrário. Veja que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = r/N$ para todo N, r Suponha agora que $\mathbb{P}(X_i = 1) = r/N$ para $i \geq 1$ e todo N, r. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{i+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_{i+1} = 1 | X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_{i+1} = 1 | X_1 = 0) \\
&= \frac{r}{N}\frac{r-1}{N-1} + \left(1 - \frac{r}{N}\right)\frac{r}{N-1} \\
&= \frac{r(r-1) + r(N-r)}{N(N-1)} = \frac{r}{N},
\end{aligned}$$

em que na segunda igualdade usamos o fato de que, após a retirada do primeiro item, temos um conjunto de $N-1$ itens que também segue uma hipergeométrica com r ou $r-1$ itens de interesse. Com isso, $X_i \sim \text{Bernoulli}(r/N)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Usando que $\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = (r/N) \cdot (r-1)/(n-1)$, dada a permutabilidade dessas variáveis, temos que $Cov(X_i, X_j) = (r/N) \cdot (r-1)/(N-1) - r^2/N^2 = -r(N-r)/(N-1)N^2$. Então,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{j \neq i} Cov(X_i, X_j) = n\frac{r}{N}\left(1 - \frac{r}{N}\right) - \frac{n(n-1)r(N-r)}{(N-1)N^2} \\
&= \frac{nr(N-r)}{N^2}\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) \\
&= n\frac{r}{N}\left(1 - \frac{r}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.
\end{aligned}$$