MSc Probabilidade 2023.1
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Paulo César P. Carvalho
Monitor Lucas Machado Moschen

Lista 8

Solução 1. Sejam $X_1, X_2 \sim \text{Geom}(p)$ independentes que contém o número de falhas até o sucesso.

(a) Usando o Teorema da Probabilidade Total,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = X_2) &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = x | X_2 = x)\mathbb{P}(X_2 = x) \\
\text{(independência)} &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_2 = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} (p(1-p)^x)^2 \\
&= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.
\end{aligned}
$$

Pela simetria $\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \mathbb{P}(X_1 > X_2)$, o que implica

$$
1 = \mathbb{P}(X_1 < X_2) + \mathbb{P}(X_1 = X_2) + \mathbb{P}(X_1 > X_2) = 2\mathbb{P}(X_1 < X_2) + \frac{p}{2-p},
$$

e, então, $\mathbb{P}(X_1 < X_2) = (2-2p)/(4-2p) = (1-p)/(2-p)$.

(b) Primeiro vamos encontrar

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = n-i | X_2 = i)\mathbb{P}(X_2 = i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = n-i)\mathbb{P}(X_2 = i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(1-p)^{n-i} p(1-p)^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} p^2(1-p)^n \\
&= (n+1)p^2(1-p)^n.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = m \mid X_1 + X_2 = n) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = m, X_1 + X_2 = n)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = m, X_2 = n - m)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = m)\mathbb{P}(X_2 = n - m)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)} \\ &= \frac{p^2(1-p)^n}{(n+1)p^2(1-p)^n} = \frac{1}{n+1}, m = 0, \dots, n.\end{aligned}$$

Solução 2. Seja $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ o número de partículas contadas e F o multiplicador com densidade f. Defina a voltagem $V = FX_t$. Estamos interessados em $\mathbb{P}(V < 1)$. Assim

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(FX_t < 1) &= \mathbb{P}(X_t = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F < 1/n \mid X_t = n)\mathbb{P}(X_t = n) \\ &= \mathbb{P}(X_t = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \int_0^{1/n} \frac{1}{(1+x)^2}\, dx \\ &= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \frac{1}{n+1} \\ &= e^{-\lambda t} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= e^{-\lambda t} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda t}[e^{\lambda t} - 1 - \lambda t] \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} = \frac{\mathbb{P}(X_t > 0)}{\lambda t}.\end{aligned}$$

Solução 3. Temos duas fontes A e B com impulsos independentes e Poisson λ e ξ respectivamente.

(a) Seja X_t a contagem total de impulsos dos, isto é, $X_t = A_t + B_t$. Já fizemos as contas desse caso e obtivemos que $X_t \sim \text{Poisson}((\lambda + \xi)t)$.

(b) Estamos interessados em $\mathbb{P}(A_t = 1 | X_t = 1)$. Assim

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_t = 1 | X_t = 1) &= \frac{\mathbb{P}(A_t = 1, X_t = 1)}{\mathbb{P}(X_t = 1)} = \frac{\mathbb{P}(A_t = 1, B_t = 0)}{\mathbb{P}(X_t = 1)} = \frac{\mathbb{P}(A_t = 1)\mathbb{P}(B_t = 0)}{\mathbb{P}(X_t = 1)} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \xi}.\end{aligned}$$

(c) Sabendo que $X_1 = 100$, estamos interessados na distribuição de A_1. Assim, para

$n = 0, \ldots, 100$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 = n \mid X_1 = 100) &= \frac{\mathbb{P}(A_1 = n)\mathbb{P}(B_1 = 100 - n)}{\mathbb{P}(X_1 = 100)} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \frac{e^{-\xi}\xi^{100-n}}{(100-n)!} \frac{100!}{e^{-\lambda-\xi}(\lambda+\xi)^{100}} \\
&= \binom{100}{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\xi}\right)^n \left(\frac{\lambda}{\lambda+\xi}\right)^{100-n},
\end{aligned}$$

que implica que $A_1 | X_1 = 100 \sim \text{Bin}(100, \lambda/(\lambda + \xi))$.

Solução 4. Seja X_T o número de visitantes que chegaram no período de T horas. Sabemos que $X_T \sim \text{Poisson}(\lambda T)$. Defina T_i o tempo de chegada entre o $(i-1)$-ésimo e o i-ésimo visitante, em que T_1 é o tempo de chegada do primeiro visitante. Como mostrado na página 154 do livro, a distribuição de $(T_1, T_1 + T_2, \ldots, T_1 + \cdots + T_n)$ dado $X_T = n$ é a distribuição da estatística de ordem de n variáveis aleatórias independentes e distribuídas uniformemente em $[0, T]$. Estamos interessados em

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_T} T - \sum_{j=1}^{i} T_j\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} T - \sum_{j=1}^{i} T_j\right] \mathbb{P}(X_T = n).$$

Para simplificar, desconsiderando a ordem, que não importa para calcular o valor esperado, basta considerar, para cada $X_T = n$, n visitantes chegando, cada um a seu tempo e sem ordená-los. Nesse caso, $\tilde{T}_i$ é o tempo de chegada para o i-ésimo visitante em qualquer ordem, que tem distribuição uniforme $[0, T]$. Com essa formulação, estamos interessados em

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} T - \tilde{T}_i\right] \mathbb{P}(X_T = n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} T - \tilde{T}_i\right] \mathbb{P}(X_T = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{T}{2} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \\
&= \frac{T}{2} e^{-\lambda T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n}{(n-1)!} \\
&= \frac{T}{2} e^{-\lambda T} \lambda T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \\
&= \lambda \frac{T^2}{2}
\end{aligned}$$

Solução 5. Sejam $X \sim b(m, p)$ e $Y \sim b(n, p)$ É fácil ver que $X + Y \sim b(m + n, p)$, pois só estamos fazendo mais experimentos de Bernoulli independentes. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k | X + Y = s) &= \frac{\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = s - k)}{\mathbb{P}(X + Y = s)} \\
&= \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \binom{n}{s-k} p^{s-k} (1-p)^{n-s+k} / \binom{m+n}{s} p^s (1-p)^{m+n-s} \\
&= \binom{m}{k} \binom{n}{s-k} / \binom{m+n}{s},
\end{aligned}$$

que é a distribuição hipergeométrica com $N = m + n$ bolas, m as que são de interesse e s são as amostragens.