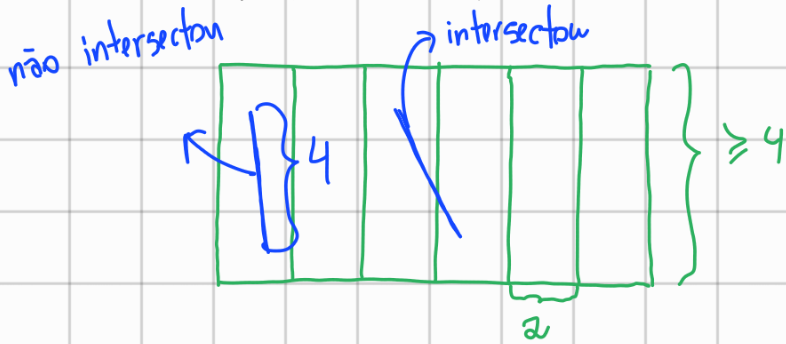
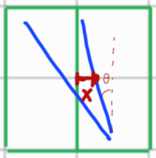
Lista 9 de Probabilidade

Soluções - Lucas Moschen

Questão 1. Considere um assoalho dividido em retas paralelas com distância 2

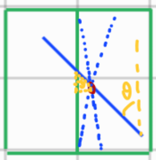


Estamos considerando o caso em que a vareta cai com distribuição uniforme no assoalho. Por isso, podemos nos ater em apenas um retângulo definido por três retas retas:



Seja X a distância entre o centro da vareta e a reta paralela mais próxima, que é a central no nosso desenho. Note que $X \in [0, 1]$. Se $X > 1$, haveria outra reta mais próxima. Por hipótese $X \sim U[0, 1]$. Agora defina θ o ângulo formado entre a reta e a vareta. Na pior das hipóteses, ela fica deitada. Logo $\theta \in [0, \pi/2]$. Por hipótese $\theta \sim U[0, \pi/2]$, afinal a posição da agulha é uniformemente distribuída no assoalho.

Quando a vareta cruza a reta paralela?



$$\sin(\theta) = \frac{x}{h} > \frac{1}{h}$$

Considere $X = x$ fixo. Se cruza, temos um triângulo retângulo com base de tamanho x e hipotenusa de tamanho não maior do que 2. Assim,

$$\sin(\theta) = x / \text{hipotenusa} \geq x/2,$$

o que nos dá $X \leq 2\sin(\theta)$. Se não cruza, $X > 2\sin(\theta)$. Vamos verificar que não cruza a outra reta. Se cruzase

$\sin(\theta) = (2-x)/\text{hipotenusa} \geq 1 - x/2 \geq 1/2$, implicando que $X > 2\sin(\theta) \geq 1$, um absurdo. Logo, estamos interessados em

$$\mathbb{P}(X \leq 2\sin(\theta)) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\sin(\theta)} 1[x \in [0,1]] \cdot \frac{2}{\pi} \, dx \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\min(2\sin(\theta), 1)} \frac{2}{\pi} \, dx \, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/6} 2\sin(\theta) \, d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} 1 \, d\theta \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-2\cos(\theta) \Big|_0^{\pi/6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right] = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{\pi} + \frac{2}{3}$$

Questão 2

Independentes

L = instante de ligar a luz $\sim U[0, T]$.

Y = tempo ligada $\sim Exp(1/T)$

a) Queremos $\mathbb{P}(\underbrace{L + Y}_{\text{lâmpada foi ligada + tempo que ficou ligada}} > T \mid L = x) = \mathbb{P}(Y > T - x \mid L = x)$

$$\text{(independência)} = \mathbb{P}(Y > T - x)$$

$$= e^{-\frac{1}{T}(T-x)} = e^{\frac{x}{T} - 1}$$

b) $$\mathbb{P}(L + Y > T) = \int_0^T \mathbb{P}(L + Y > T \mid L = x) \underbrace{dF_L(x)}_{f_L(x)\,dx}$$

$$= \int_0^T \mathbb{P}(Y > T - x) \frac{1}{T} \, dx$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T e^{\frac{x}{T} - 1} \, dx = e^{\frac{x}{T} - 1} \Big|_0^T = 1 - e^{-1}$$

$$c)\ \mathbb{P}(\underbrace{L < x}_{\text{Ligada antes de } x} \mid \underbrace{L + Y > T}_{\text{está ligada em } T}) = \frac{\mathbb{P}(L+Y>T,\ L<x)}{\mathbb{P}(L+Y>T)}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-1}} \left(\int_0^x \int_{T-\ell}^{+\infty} f_L(\ell)\, f_Y(y)\, dy\, d\ell \right)$$

$$= \frac{e}{e-1} \left(\int_0^x \int_{T-\ell}^{+\infty} \frac{1}{T} \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}y}\, dy\, d\ell \right)$$

$$= \frac{e}{e-1} \left(\int_0^x \frac{1}{T} \left(-e^{-\frac{1}{T}y} \right)_{T-\ell}^{+\infty} d\ell \right)$$

$$= \frac{e}{e-1} \left(\int_0^x \frac{1}{T} e^{\frac{\ell}{T}-1}\, d\ell \right) = \frac{e}{e-1} \left[e^{\frac{\ell}{T}-1} \right]_0^x$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{T}} - 1}{e-1}$$

Questão 3 - prob. 34 do capítulo 4

$X \sim Exp(1/2)$

$Y \mid X = x \sim U[0, x^2]$

a) Seja $Z = Y/X^2$.

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y/X^2 \leq z \mid X = s)\, f_X(s)\, ds$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y \leq s^2 z \mid X = s)\, \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}s}\, ds$$

$0 \leq s^2 z \leq s^2 \Rightarrow z \in (0,1)$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{s^2 z}{s^2} \frac{1}{2} e^{-1/2 s}\, ds$$

$$= z \Rightarrow Z \sim U[0,1].$$

b) $E[X] = 2,$

$$E[Y] = E[E[Y|X]] = E[X^2/2] = \frac{1}{2}(Var(X) + E(X)^2) = 4$$

$$E[XY] = E[E[XY|X]] = E[X\,E[Y|X]]$$

$$= E[X^3/2]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^3 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \overset{\text{wolfram alpha}}{=} 24$$

↳ integrar por partes...

Questão 4 - problema 37 do capítulo 4

$X|\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$\lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$

a) $$P(X=k) = \int_0^{\infty} P(X=k|\lambda) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda}\,d\lambda$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda}\,d\lambda$$

$du = 2d\lambda$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)} \int_0^{+\infty} \lambda^{k+\alpha-1} e^{-\overset{u}{\boxed{2\lambda}}} \boxed{d\lambda}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^{k+\alpha-1} e^{-u} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+\alpha} \int_0^{+\infty} u^{k+\alpha-1} e^{-u}\,du$$

Definição da função Gamma

$$= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

b) $$E[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)} \frac{1}{2^{k+\alpha}}.$$ Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$,

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!(k-1)!} \frac{1}{2^{k+n}} = \sum_{k=1}^{+\infty} n \binom{n+k-1}{n} \frac{1}{2^{k+n}}$$

Além disso, $E[X] = E[E[X|\lambda]] = E[\lambda] = n$.

Assim, $\sum_{k=1}^{+\infty} n \binom{n+k-1}{n} \frac{1}{2^{k+n}} = n \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n+k-1}{n} \frac{1}{2^k} = 2^n$

Questão 5- problema 41 do capítulo 4

(a) $$\mathbb{P}(X<Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X<Y | X=x)\, dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y>x | X=x)\, dF(x)$$

↓ Independência

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_Y(x))\, dF(x)$$

(b) $X \sim Exp(\lambda)$

$Y \sim Unif[0,\lambda]$

$\mathbb{P}(X=Y) = 0$, pois X e Y são v.a. contínuas

$$\mathbb{P}(Y<X) = \int_0^{\lambda} (1 - F_X(y))\, f_Y(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} e^{-\lambda y}\, dy = \frac{1}{\lambda}\left(-\frac{e^{-\lambda y}}{\lambda}\Big|_0^{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1-e^{-\lambda^2}}{\lambda^2}$$

Para conferir, $$\mathbb{P}(X<Y) = \int_0^{+\infty} (1-F_Y(x))\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= 1 - \left(\frac{1-e^{-\lambda^2}}{\lambda^2}\right)$$

Questão 6 - problema 42 do capítulo 4

$T =$ vida útil $\sim Exp(\xi)$

$X_t = \#$ fregueses em $[0,t] \sim Poisson(\lambda t)$

Independente

Em $t=0$ instala-se o fuzível. Note que X_T é o número de fregueses que entraram em $[0,T]$. Os que entraram em $t>T$ já não viram luz no supermercado. Logo estamos interessados em

$$\begin{aligned} E[X_T] &= E[E[X_T \mid T]] \\ &= E[\lambda T] \\ &= \lambda / \xi . \end{aligned}$$

Questão 7

$$X \mid \lambda \sim Poisson(\lambda)$$
$$\lambda \sim Exp(1)$$

a) Estamos interessados na distribuição condicional de λ dado $X = x$, por isso dizemos a posteriori. Assim, considere a densidade condicional

$$f_{\lambda|X}(\lambda|x) = \frac{f_{X,\lambda}(x,\lambda)}{f_X(x)}$$

$$f_{X,\lambda}(x,\lambda) = \overbrace{P(X=x|\lambda) f_\lambda(\lambda)}^{\text{Dado pelo problema}} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \cdot \lambda e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{x+1} e^{-2\lambda}}{x!}$$

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} P(X=x|\lambda) f_\lambda(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{x!} \int_0^{+\infty} \lambda^{x+1} e^{-2\lambda}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{x!} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^{x+2-1} e^{-u} \frac{du}{2} = \frac{\Gamma(x+2)}{x!\, 2^{x+2}}$$

Logo $f_{\lambda|X}(\lambda|x) = \overset{\beta}{\boxed{2}}^{\overset{\alpha}{\boxed{x+2}}} \lambda^{\overset{\alpha-1}{\boxed{x+1}}} e^{-\overset{\beta}{\boxed{2}}\lambda} / \Gamma(\overset{\alpha}{\boxed{x+2}})$

Logo $\lambda | x \sim \text{Gamma}(x+2, 2)$

b) MAP = maximum a posteriori

$$\hat{\lambda}_{MAP}(x) = \max_{\lambda > 0} f_{\lambda|x}(\lambda|x)$$

removi partes que não dependem de λ

$$= \max_{\lambda > 0} \lambda^{x+1} e^{-2\lambda}$$

A função $\log(\cdot)$ é crescente. Logo se $x > y \Rightarrow \log(x) > \log(y)$

$$= \max_{\lambda > 0} (x+1)\log\lambda - 2\lambda$$

Para maximizar essa função, vamos procurar os pontos críticos:

$$0 = \frac{d}{d\lambda}((x+1)\log\lambda - 2\lambda) = \frac{x+1}{\lambda} - 2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{x+1}{2}$$

Além disso $\frac{d^2}{d\lambda^2}((x+1)\log\lambda - 2\lambda) = -\frac{(x+1)}{\lambda^2} < 0$, portanto vale que $\hat{\lambda}_{MAP}(x) = (x+1)/2$.

c) $\hat{\lambda}_{EAP}(x) = E[\lambda | x] = \frac{x+2}{2}$.

Expected a posteriori