Inferência Estatística 2022.4
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Luiz Max de Carvalho
Monitor Lucas Machado Moschen — 21 de julho de 2022

Lista de exercícios adicional

Exercício 1 Suponha que $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sejam variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli com parâmetro p_i. Assuma que cada para cada i, é observado um vetor $x_i \in \mathbb{R}^k$, cujas coordenadas são chamada de *covariáveis*. Além do mais, dado θ, as variáveis Y_i são independentes com

$$\operatorname{logit}(p_i) := \log\left\{\frac{p_i}{1-p_i}\right\} = \theta \cdot x_i.$$

Encontre uma estatística suficiente mínima para θ.

Exercício 2 Sejam $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli(θ). Defina a quantidade aleatória $X_1 = \min\{n : Z_n = 0\}$.

(a) Escreva a densidade com respeito à medida de contagem da distribuição de X_1.

(b) Mostre que X_1 é estatística suficiente para θ.

(c) Encontre o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_1$ de θ baseado em X_1.

(d) Mostre que o estimador $\hat{\eta} = \hat{\theta}_1/(1-\hat{\theta}_1)$ é estimador não enviesado para a razão de chances $\eta = \theta/(1-\theta)$.

(e) Usando o Teorema de Rao-Blackwell, é possível propor um estimador com variância menor?

(f) Calcule o limite inferior de Cramér-Rao do MSE para estimadores não enviesados.

Exercício 3 Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\theta, a\theta^2)$ com $a > 0$ conhecido. Mostre que a estatística $T(X) = (\bar{X}, S^2)$ é estatística suficiente mínima para θ, mas a família de distribuições não é completa. Isso contradiz o fato de ela pertencer à família exponencial? *Dica: qual a particularidade do espaço de parâmetros?*

Exercício 4 Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim}$ Uniform$(\theta, \theta+1)$. Encontre uma estatística suficiente mínima e um estimador para θ. Verifique:

(a) Essa estatística é completa para a família de distribuições?

(b) Esse estimador é não enviesado?

(c) Esse estimador é consistente?

(d) Por que não é possível aplicar o limite inferior de Cramér-Rao?

Exercício 5 (Monte Carlo Swindles) Seja $X = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ e M_n a mediana amostral. Defina $v_n = \mathrm{Var}_{\mu,\sigma^2}(M_n)$. Nesse exercício, vamos estudar a estimação de v_n através do método de Monte Carlo.

(a) Considere N amostras aleatórias de tamanho n, denotadas por $(X_1^i, \ldots, X_n^i)$ e seja M_n^i a mediana da i-ésima amostra, $i = 1, \ldots, N$. Calcule a variância amostral S_N^2 de $\{M_n^1, \ldots, M_n^N\}$. Mostre que a sequência $\{S_N^2\}_{N\in\mathbb{N}}$ é consistente para v_n.

(b) Mostre que $\bar{X}_n$ é estatística suficiente completa e $V = (X_1 - \bar{X}_n, \ldots, X_n - \bar{X}_n)$ é estatística anciliar para μ. Conclua que $\bar{X}_n$ e $M_n - \bar{X}_n$ são independentes.

(c) Calcule $\mathrm{Var}(\bar{X}_n)$ e mostre a relação entre v_n e $\mathrm{Var}(M_n - \bar{X}_n)$.

(d) Usando a relação acima e a ideia destacada em (a), discuta uma outra sequência de estimadores para v_n.

(e) Encontre aproximações para a variância do estimador de (a) e de (d) usando que a normalidade assintótica. Conclua que para n suficientemente grande, o método em (d) tem variância menor e, portanto, maior precisão. Essa abordagem é chamada de *Monte Carlo Swindles*.

Exercício 6 Considere uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$.

(a) Proponha um estimador baseado no método de momentos para (θ, σ).

(b) Calcule o estimador de máxima verossimilhança para (θ, σ).

(c) Seja $\hat{\sigma}^2$ o MLE para σ^2 e S^2 a variância amostral. Calcule seus vieses.

(d) Mostre que $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$ e $\hat{s} = \sqrt{S^2}$ são enviesados.

Exercício 7 Expresse a família das distribuições Beta na família exponencial. Encontre o parâmetro natural, o espaço de parâmetros natural e estatísticas suficientes. Encontre a média e a variância das estatísticas suficientes. (*Dica: Veja sobre as funções digamma e trigamma.*)

Exercício 8 Considere uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ com distribuição $\mathrm{Binomial}(k, p)$ em que k e p são desconhecidos.

(a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança $\hat{p}$ para p e mostre que o estimador de máxima verossimilhança para k é $\hat{k}$ tal que

$$(\hat{k}(1-\hat{p}))^n \geq \prod_{i=1}^{n}(\hat{k} - x_i) \text{ e } ((\hat{k}+1)(1-\hat{p}))^n < \prod_{i=1}^{n}(\hat{k}+1-x_i),$$

em que $x_1, \ldots, x_n$ são observações da amostra.

(b) Calcule $\hat{k}$ para $x = (16, 18, 22, 25, 27)$ e para $x = (16, 18, 22, 25, 28)$.

(c) O que pode-se concluir da robustez do estimador de máxima verossimilhança para esse exemplo?

Exercício 9 Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes cujas distribuições parametrizadas por θ têm densidade $f_X(x|\theta)$ e $f_Y(y|\theta)$, respectivamente. Suponha que $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}$. Mostre que $I_{X,Y}(\theta) = I_X(\theta) + I_Y(\theta)$.

Exercício 10 Seja $X \sim \text{Poi}(\theta)$ e defina $g(\theta) = \exp\{-3\theta\}$.

(a) Encontre o limite inferior de Cramér-Rao para estimadores não enviesados de $g(\theta)$.

(b) Se $\phi(X) = (-2)^X$, encontre $\text{Var}_\theta(\phi(X))$.

(c) Encontre o limite inferior de Cramér-Rao e de Chapman-Robbins para a variância de estimadores não enviesados de θ.

Exercício 11 Suponha que n flechas são lançadas em um alvo circular de raio r e que a i-ésima flecha passa no ponto (X_i, Y_i). Assuma que os pares (X_i, Y_i) são independentes com distribuição $N(0, \theta I_2)$.

(a) Defina $R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$. Encontre a distribuição de R_i^2/θ para uma flecha arbitrária.

(b) Calcule a probabilidade da i-ésima aresta atingir o alvo.

(c) Encontre o MLE de θ e a distribuição assintótica do estimador.