Monitoria 20/07/2022

Exercício 1 Suponha que $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sejam variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli com parâmetro p_i. Assuma que cada para cada i, é observado um vetor $x_i \in \mathbb{R}^k$, cujas coordenadas são chamada de *covariáveis*. Além do mais, dado θ, as variáveis Y_i são independentes com

$$\operatorname{logit}(p_i) \underbrace{:=}_{\text{define-se como}} \log\left\{\frac{p_i}{1-p_i}\right\} = \theta \cdot x_i, \quad \theta \in \mathbb{R}^K$$

Encontre uma estatística suficiente mínima para θ.

Temos $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p_i)$, com $\operatorname{logit}(p_i) = \theta \cdot x_i$.
Assim

$$\frac{p_i}{1-p_i} = e^{\theta\cdot x_i} \Rightarrow p_i(1+e^{\theta\cdot x_i}) = e^{\theta \cdot x_i}$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{e^{\theta\cdot x_i}}{1+e^{\theta\cdot x_i}}.$$

Com θ fixo, $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ são independentes. Assim,

$$\begin{aligned}
f_Y(y_1,\dots,y_n|\theta) &= \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y_i|\theta) \\
&= \prod_{i=1}^n p_i^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i} \quad \text{Densidade Bernoulli} \\
&= \prod_{i=1}^n \left(\frac{e^{\theta\cdot x_i}}{1+e^{\theta\cdot x_i}}\right)^{y_i}\left(\frac{1}{1+e^{\theta\cdot x_i}}\right)^{1-y_i} \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{e^{y_i\theta\cdot x_i}}{1+e^{\theta\cdot x_i}} \\
&= \frac{e^{\sum y_i \theta\cdot x_i}}{\prod_{i=1}^n 1+e^{\theta\cdot x_i}} = \frac{e^{\theta\cdot\sum y_i x_i}}{\prod_{i=1}^n 1+e^{\theta\cdot x_i}} = \frac{e^{\theta\cdot T(y)}}{\prod_{i=1}^n 1+e^{\theta\cdot x_i}},
\end{aligned}$$

com $T(y) = \sum_{i=1}^n y_i x_i$. Pelo Teorema de Fatorização, fazendo $h(y)=1$ e $g(T(y)|\theta) = f_Y(y_1,\dots,y_n|\theta)$, $T(y)$ é suficiente. Mais do que isso, verificamos que f_Y pertence à família exponencial.

- **Lehmann-Scheffé:** Se
$T(x)=T(y) \Leftrightarrow f(x|\theta)=f(y|\theta)h(x,y)$, $\forall \theta$ e algum h.,
então T é suficiente mínima.

Se T é suficiente, a ida é direta usando o Teorema da Fatorização, pois
$$\begin{aligned} f(x|\theta) &= h(x)\,g(T(x)|\theta) \\ &= h(x)\,h(y)^{-1}h(y)\,g(T(y)|\theta) \\ &= h(x)\,h(y)^{-1}f(y|\theta). \end{aligned}$$

Agora, suponha a volta:

$$\log h(y',y'') = \log \frac{f(y'|\theta)}{f(y''|\theta)} = \theta\cdot(T(y')-T(y'')),$$

portanto $T(y')=T(y'')$. Com isso, T é suficiente mínima

- **Bahadur:** Se T é suficiente completa limitada, então ela é suficiente mínima.

Como provar que T é completa? $\forall \theta \in \Omega$

$$E_\theta[g(T)] = \sum_{T(y)=\sum y_i x_i} g(T(y))\frac{e^{\theta\cdot T(y)}}{\cancel{\prod_{i=1}^{n} 1+e^{\theta\cdot x_i}}} = 0$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} g(T)=0.$$

Existe uma certa dificuldade em trabalhar com isso, mas como f_Y pertence à família exponencial e o espaço dos parâmetros $\Omega=\mathbb{R}^k$ contém um conjunto aberto, T é suficiente completa e, portanto, suficiente mínima.

Exercício 2 Sejam $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli(θ). Defina a quantidade aleatória $X_1 = \min\{n : Z_n = \mathbf{0}\}$.

(a) Escreva a densidade com respeito à medida de contagem da distribuição de X_1.

(b) Mostre que X_1 é estatística suficiente para θ.

(c) Encontre o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_1$ de θ baseado em X_1.

(d) Mostre que o estimador $\hat{\eta} = \hat{\theta}_1/(1-\hat{\theta}_1)$ é estimador não enviesado para a razão de chances $\eta = \theta/(1-\theta)$.

(e) Usando o Teorema de Rao-Blackwell, é possível propor um estimador com variância menor?

(f) Calcule o limite inferior de Cramér-Rao do MSE para estimadores não enviesados.

a) $\mathbb{P}(X_1 = k) = \mathbb{P}(Z_1 = 1, \dots, Z_{k-1} = 1, Z_k = 0)$

$= \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(Z_i = 1)\, \mathbb{P}(Z_k = 0)$

$= \theta^{k-1}(1-\theta) \rightsquigarrow$ Geométrica

Logo a densidade é $f_X(x) = \theta^{x-1}(1-\theta)\mathbb{1}_{\mathbb{N}}\{x\}$

b) $f_{X_1}(x) = \underbrace{\theta^{x_1-1}(1-\theta)}_{g(x_1|\theta)}$ e, portanto, pelo Teorema da Fatorização, X_1 é suficiente.

c) A verossimilhança é

$$L(\theta|x) = \theta^{x-1}(1-\theta)$$

$\Rightarrow \log L(\theta|x) = (x-1)\log\theta + \log(1-\theta)$

Com isso

$$\frac{d}{d\theta}\log L(\theta|x) = \frac{x-1}{\theta} - \frac{1}{1-\theta} = 0$$

$\Rightarrow \frac{x-1}{\theta} = \frac{1}{1-\theta} \Rightarrow \frac{1}{\theta} - 1 = \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{\theta} = \frac{x}{x-1}$

$\Rightarrow \theta = \frac{x-1}{x}$. Além do mais,

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\log L(\theta|x) = -\frac{(x-1)}{\theta^2} - \frac{1}{(1-\theta)^2} < 0$$

$\Rightarrow \hat{\theta}_1 = (x-1)/x$ é MLE quando $X_1 = x$.

d) $\hat{\eta} = \hat{\theta}_1/(1-\hat{\theta}_1)$, então

média da Geométrica

$$E_\theta[\hat{\eta}] = E\left[\frac{(x-1)/x}{1-(x-1)/x}\right] = E[x] - 1 = \frac{1}{1-\theta} - 1 = \frac{\theta}{1-\theta}$$

$\hat{\eta} = x-1$

$$= \eta \Rightarrow \hat{\eta} \text{ é não viesado.}$$

e) Lehmann-Scheffé: se T é completa, então todos os estimadores não enviesados que são funções de T (não de X) são iguais quase certamente. Além disso, se o estimador é função de T, ele é UMVUE.

Como nossa distribuição é geométrica e o espaço de parâmetros $\Omega = [0,1]$ contém um aberto, então X_1 é suficiente completa. Como $\hat{\eta}$ é função de X_1, ele é UMVUE e Rao-Blackwell não consegue melhorar:

$E[\hat{\eta} \mid X_1] \rightsquigarrow$ Rao-Blackwell

↳ estatística suficiente

f) Seja T estimador não enviesado para η. Assim,

$$\mathrm{Var}_\eta(T) \geq [I_X(\eta)]^{-1},$$

em que
$$I_X(\eta) = -\mathbb{E}_\eta\left[\frac{d^2}{d\eta^2}\log f(x\mid\eta)\right]$$
$$= -\mathbb{E}_\eta\left[\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d}{d\theta}\log f(x\mid\eta)\cdot\frac{d\theta}{d\eta}\right)\right]$$
$$= -\mathbb{E}_\eta\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\log f(x\mid\eta)\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)^2 + \frac{d}{d\theta}\log f(x\mid\eta)\frac{d^2\theta}{d\eta^2}\right]$$

↳ meio chato de fazer

Sabemos que um estimador atinge o limite de Cramér-Rao se, e somente se,

$$\frac{d}{d\theta} \log f(x|\theta) = a(\theta)\,\phi(x) + b(\theta)$$

$$\frac{d}{d\eta} \log f(x_1|\eta) = \frac{x_1 - 1}{\theta} - \frac{1}{1-\theta} = \frac{(1+\eta)(x_1-1)}{\eta} - (1+\eta)$$

$$= \left(\frac{1+\eta}{\eta}\right)\hat{\eta} - (1+\eta)$$

$\Rightarrow \hat{\eta}$ atinge o limite inferior de Cramér-Rao e $Var_\theta(\hat{\eta}) = Var(x_1 - 1) = Var(x_1) = \theta/(1-\theta)^2$.

Exercício 3 Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\theta, a\theta^2)$ com $a > 0$ conhecido. Mostre que a estatística $T(X) = (\bar{X}, S^2)$ é estatística suficiente mínima para θ, mas a família de distribuições não é completa. Isso contradiz o fato de ela pertencer à família exponencial? *Dica: qual a particularidade do espaço de parâmetros?*

Para $\sigma^2 = a\theta^2$, sabemos que a estatística é suficiente mínima para $(\theta, a\theta^2)$. Note que, para $x, y \in \mathbb{R}$

$$\log \frac{f(\mathbf{x}|\theta, a\theta^2)}{f(\mathbf{y}|\theta, a\theta^2)} = \frac{1}{a\theta}\left(\sum x_i - \sum y_i\right) - \frac{1}{2a\theta^2}\left(\sum x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

não depende de θ, logo $\sum x_i = \sum y_i$ e $\sum x_i^2 = \sum y_i^2$. Em particular $(\bar{X}, S^2)$ é estatística suficiente mínima.

Observe que $E[\bar{X}^2] = Var(\bar{X}) + E[\bar{X}]^2 = \frac{a\theta^2}{n} + \theta^2$ e

não viesado

$E[S^2] = a\theta^2$. Logo, fazendo $c\left(\frac{a}{n} + 1\right) - a = 0$, teremos

que $E[c\bar{X}^2 - S^2] = 0$, mesmo que $c\bar{X}^2 - S^2 \neq 0$.

Veja que o espaço $\{(\theta, a\theta^2) : \theta \in \mathbb{R}\}$ não contém abertos.

Exercício 4 Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim}$ Uniform$(\theta, \theta+1)$. Encontre uma estatística suficiente mínima e um estimador para θ. Verifique:

(a) Essa estatística é completa para a família de distribuições?

(b) Esse estimador é não enviesado?

(c) Esse estimador é consistente?

$$f_X(x_1, \ldots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}\{\theta \leq x_i \leq \theta + 1\}$$
$$= \mathbb{1}\{\min\{x_i\} \geq \theta \geq \max\{x_i\} - 1\}$$

Então $T(x) = (\min x_i, \max x_i)$ é estatística suficiente.

Vamos usar Lehmann-Scheffman para provar que é mínima.

Seja $f(x|\theta) = f(y|\theta)h(x,y)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Se $\theta \in [\max x_i - 1, \min x_i]$, $f(x|\theta) = 1$ e, portanto, $f(y|\theta) \neq 0$, isto é, $f(y|\theta) = 1$ e $h(x,y) = 1$. Assim, $\theta \in [\max y_i - 1, \min y_i]$. Se $\theta \notin [\max x_i - 1, \min x_i]$, então $f(x|\theta) = 0 \Rightarrow f(y|\theta) = 0$. Com isso,

$\min x_i = \min y_i$ e $\max x_i = \max y_i$

$\Rightarrow T$ é mínima.

MLE: $T(x) \in [\min\{x_i\}, \max\{x_i\} - 1]$

Momentos: $\theta + 1/2 = E[X] = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{X} - 1/2$.

a) Não é completa. Defina
$$R = \max\{x_i\} - \min\{x_i\}$$
$$= (\max\{x_i\} - \theta) - (\min\{x_i\} - \theta)$$
$$= V_1 - V_2,$$

em que $V_1 \sim \mathcal{U}nif(0,1)$ e $V_2 \sim \mathcal{U}nif(0,1)$. Assim, R é estatística ancilar. Pelo Teorema de Basu, se T fosse completa, então R e T seriam independentes, um absurdo. Com isso, T não é completa.

b) Sim. $E[\bar{X} - 1/2] = E[X_1] - 1/2 = \theta$.

c) Sim, $\hat{\theta} = \bar{X} - 1/2 \xrightarrow{P} E[X] - 1/2$ pela Lei dos Grandes Números e $E[X] = \theta + 1/2$.

d) As condições de regularidade de Fisher não são satisfeitas. $C = \{x : f(x|\theta) > 0\}$
$= [\theta, \theta + 1]$,
que depende de θ!

Exercício 5 (Monte Carlo Swindles) Seja $X = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ e M_n a mediana amostral. Defina $v_n = \mathrm{Var}_{\mu,\sigma^2}(M_n)$. Nesse exercício, vamos estudar a estimação de v_n através do método de Monte Carlo.

(a) Considere N amostras aleatórias de tamanho n, denotadas por $(X_1^i, \ldots, X_n^i)$ e seja M_n^i a mediana da i-ésima amostra, $i = 1, \ldots, N$. Calcule a variância amostral S_N^2 de $\{M_n^1, \ldots, M_n^N\}$. Mostre que a sequência $\{S_N^2\}_{N \in \mathbb{N}}$ é consistente para v_n.

(b) Mostre que $\bar{X}_n$ é estatística suficiente completa e $V = (X_1 - \bar{X}_n, \ldots, X_n - \bar{X}_n)$ é estatística anciliar para μ. Conclua que $\bar{X}_n$ e $M_n - \bar{X}_n$ são independentes.

(c) Calcule $\mathrm{Var}(\bar{X}_n)$ e mostre a relação entre v_n e $\mathrm{Var}(M_n - \bar{X}_n)$.

(d) Usando a relação acima e a ideia destacada em (a), discuta uma outra sequência de estimadores para v_n.

(e) Encontre aproximações para a variância do estimador de (a) e de (d) usando que a normalidade assintótica. Conclua que para n suficientemente grande, o método em (d) tem variância menor e, portanto, maior precisão. Essa abordagem é chamada de *Monte Carlo Swindles*.

a) $v_n = \mathbb{E}_{\mu,\sigma^2}[(M_n - E[M_n])^2]$

$$S_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (M_n^i - \overline{M_n})^2$$
$$= \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (M_n^i)^2 - \overline{M_n}^2 \right)$$
$$:= \frac{N}{N-1} \left(\overline{M_n^2} - \overline{M_n}^2 \right).$$

Pela lei dos grandes números, $\overline{M_n^2} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[M_n^2]$ e $\overline{M_n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[M_n]$.
Como $x \mapsto x^2$ é contínua, $\overline{M_n}^2 \xrightarrow{P} \mathbb{E}[M_n]^2$. Com isso

$$\overline{M_n^2} - \overline{M_n}^2 \xrightarrow{P} E[M_n^2] - E[M_n]^2 = Var(M_n) = v_n,$$

$$X_n \xrightarrow{P} X,\ Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X+Y$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n + Y_n - (X+Y)| > \varepsilon) &\le \mathbb{P}(|X_n - X| + |Y_n - Y| > \varepsilon) \\ &\le \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon/2 \text{ ou } |Y_n - Y| > \varepsilon/2) \\ &\le \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon/2) + \mathbb{P}(|Y_n - Y| > \varepsilon/2) \to 0 \end{aligned}$$

$$a_n \to a,\ X_n \xrightarrow{P} X,\ a \neq 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|a_n X_n - aX| > \varepsilon) &\le \mathbb{P}(|a_n X_n - a_n X| + |a_n X - aX| > \varepsilon) \\ &\le \mathbb{P}(|a_n||X_n - X| > \varepsilon/2) + \mathbb{P}(|a_n - a||X| > \varepsilon) \\ &\le \mathbb{P}(|a||X_n - X| > \varepsilon/4) + \mathbb{P}(|a_n - a||X_n - X| > \varepsilon/4) + \mathbb{P}(|a_n - a||X| > \varepsilon) \\ &\le \underbrace{\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon/4|a|)}_{\to 0} + \underbrace{\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon/4)}_{\to 0} + \underbrace{\mathbb{P}(\underbrace{|a_n - a|}_{\to 0}|X| > \varepsilon)}_{\to 0} \end{aligned}$$

Tome n grande para $|a_n - a| < 1$

desde que $\mathbb{P}(|X| = +\infty) = 0$

Como $\frac{N}{N-1} \xrightarrow{N\to\infty} 1$, $S_N^2 \xrightarrow{P} v_n$.

b) Com σ^2 fixo, como $\mathbb{R}$ contém um aberto, e a distribuição Normal pertence à família exponencial, $\overline{X}_n$ é suficiente completa. Note que
$$(X_1 - \overline{X}, \dots, X_n - \overline{X}) = \left(I - \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right)(X_1, \dots, X_n)$$
tem distribuição normal, com média 0 e variância
$$\left(I - \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right)\sigma^2 I \left(I - \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \sigma^2\left(I - \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right),$$
que não depende de μ. Logo é estatística ancilar.

Pelo Teorema de Basu, $\overline{X}$ e $(X_1 - \overline{X}, \dots, X_n - \overline{X})$ são independentes. Além do mais $M_n = f(X_1, \dots, X_n) \Rightarrow M_n - \overline{X}$ independe de $\overline{X}$.

c) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$

$$v_n = \mathrm{Var}(M_n) = \mathrm{Var}(M_n - \bar{X} + \bar{X}) = \mathrm{Var}(M_n - \bar{X}) + \underbrace{\mathrm{Var}(\bar{X})}_{\hookrightarrow \text{ independência}}$$

d) Para cada amostra, $\{X_1^i, \dots, X_n^i\}$, $i = 1, \dots, N$, calcule a média e mediana amostral M_n^i e $\bar{X}^i$, respectivamente. Por fim, calcule

$$\tilde{S}_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(M_n^i - \bar{X}^i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(M_n^i - \bar{X}^i)\right)^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\xrightarrow{P} \mathrm{Var}(M_n - \bar{X}) + \sigma^2/n = v_n$$

e) Temos que (aplicando o método Delta), M_n^i é aproximadamente normal para n suficientemente grande, portanto, $M_n^i - \bar{X}^i$ também aproximadamente normal, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$. Com isso

$$\frac{(N-1)S_N^2}{\mathrm{Var}(M)} \quad \text{e} \quad \frac{(N-1)(\tilde{S}_N^2 - \sigma^2/n)}{\mathrm{Var}(M - \bar{X})}$$

tem distribuição aproximada chi-quadrado com $N-1$ graus. Em particular, ambos tem variância aproximada $2(N-1)$, para n grande.

$$\mathrm{Var}\left(\frac{(N-1)}{\mathrm{var}(M)} S_N^2\right) \approx 2(N-1) \Rightarrow \mathrm{Var}\, S_N^2 \overset{n\to\infty}{\approx} \frac{2\,\mathrm{Var}^2 M_n}{N-1}$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{(N-1)}{\mathrm{Var}(M - \bar{x})}\left(\tilde{S}_N^2 - \cancel{\frac{\sigma^2}{n}}^{\text{constante}}\right)\right) \approx 2(N-1) \Rightarrow \mathrm{Var}(\tilde{S}_N^2) \approx \frac{2\,\mathrm{Var}^2(M_n - \bar{X}_n)}{N-1}$$

Note que

$$\mathrm{Var}(M_n - \bar{X}) = \mathrm{Var}(M_n) - \underbrace{\mathrm{Cov}(M_n, \bar{X})}_{\text{correlação alta}} + \underbrace{\mathrm{Var}(\bar{X})}_{\sigma^2/n \text{ pequeno}}$$

$$< \mathrm{Var}(M_n), \text{ para } n \text{ suf. grande.}$$

Exercício 6 Considere uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$.

(a) Proponha um estimador baseado no método de momentos para (θ, σ).

(b) Calcule o estimador de máxima verossimilhança para (θ, σ).

(c) Seja $\hat{\sigma}^2$ o MLE para σ^2 e S^2 a variância amostral. Calcule seus vieses.

(d) Mostre que $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$ e $\hat{s} = \sqrt{S^2}$ são enviesados.

a) $\theta = E[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\sigma^2 + \theta^2 = E[X^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$,

assim $\sigma^2 = \frac{1}{n}\left(\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2\right) \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2\right)}$

é solução do sistema. Portanto

$$\hat{\theta} = \bar{X}_n \quad e \quad \hat{\sigma} = \left[\frac{1}{n}\left(\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2\right)\right]^{1/2}$$

é estimador do método de momentos.

b) $\lambda(\theta|x) = \log f(x|\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 - n\log\sqrt{2\pi}\,\sigma$

Assim $\frac{d}{d\theta}\lambda(\theta|x) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{X}$.

$\frac{d}{d\sigma}\lambda(\theta|x) = \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 - \frac{n}{\sigma} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

Teorema de Cochran

c) Sabemos que $n\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}$, portanto

$$E[\hat{\sigma}^2] = E\left[\frac{\sigma^2}{n}\frac{n}{\sigma^2}\cdot\hat{\sigma}^2\right] = \frac{\sigma^2}{n}(n-1) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$E[S^2] = E\left[\frac{\sigma^2}{(n-1)}\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\right] = \frac{\sigma^2}{n-1}\cdot n-1 = \sigma^2$$

d) Suponha que não sejam viesados:

$\sigma^2 = E[\hat{\sigma}]^2 = E[\hat{\sigma}^2] - Var(\hat{\sigma}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - Var(\hat{\sigma})$

$\Rightarrow Var(\hat{\sigma}) = -\sigma^2/n < 0$, um absurdo.

$\sigma^2 = E[\hat{s}]^2 = E[\hat{s}^2] - Var(\hat{s}) = \sigma^2 - Var(\hat{s})$

$\Rightarrow Var(\hat{s}) = 0 \Rightarrow \hat{s} \overset{q.c.}{=} const.$, um absurdo.

Exercício 7 Expresse a família das distribuições Beta na família exponencial. Encontre o parâmetro natural, o espaço de parâmetros natural e estatísticas suficientes. Encontre a média e a variância das estatísticas suficientes. (*Dica: Veja sobre as funções digamma e trigamma.*)

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \mathbb{1}(x \in (0,1))$$

$$= \underbrace{\frac{\mathbb{1}_{[0,1]}(x)}{x(1-x)}}_{h(x)} \underbrace{\frac{1}{B(\alpha,\beta)}}_{c(\alpha,\beta)} \exp\left\{\alpha \log(x) + \beta \log(1-x)\right\}$$

Parâmetro natural: (α, β)

Espaço: $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx < +\infty \iff \alpha, \beta > 0$

$$= \mathbb{R}_+^2$$

Estatística suficiente: $T(x_1, \dots, x_n) = (\sum \log(x_i), \sum \log(1-x_i))$

$$E[\log(x)] = \frac{d}{d\alpha} \log B(\alpha,\beta) = \psi(\alpha) - \psi(\alpha+\beta)$$

$$E[\log(1-x)] = \frac{d}{d\beta} \log B(\alpha,\beta) = \psi(\beta) - \psi(\alpha+\beta)$$

$$Var(\log(x)) = \frac{d^2}{d\alpha^2} \log B(\alpha,\beta) = \psi'(\alpha) - \psi'(\alpha+\beta)$$

$$Var(\log(1-x)) = \frac{d^2}{d\beta^2} \log B(\alpha,\beta) = \psi'(\beta) - \psi'(\alpha+\beta)$$

8. a) $f(x|K,p) = \binom{K}{x} p^x (1-p)^{K-x}$

$$L(K,p|\vec{x}) = \prod_{i=1}^n \binom{K}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{K-x_i}$$

$$\ell(K,p) = \sum_{i=1}^n \ln\binom{K}{x_i} + \ln p \sum_{i=1}^n x_i + \left(nK - \sum_{i=1}^n x_i\right)\ln(1-p)$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\ell(\hat{K},\hat{p}) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\hat{p}} - \frac{n\hat{K} - \sum_{i=1}^n x_i}{1-\hat{p}} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n\hat{K}}$$

Note que

$$\frac{L(K,\hat{p})}{L(K-1,\hat{p})} = \prod_{i=1}^n \frac{K}{K-x_i}(1-\hat{p}) = \frac{[K(1-\hat{p})]^n}{\prod_{i=1}^n (K-x_i)}$$

Quando $[K(1-\hat{p})]^n \geq \prod_{i=1}^n (K-x_i)$, L cresce em K.
Como $L(\hat{K},\hat{p})$ maximiza a verossimilhança,

$$[\hat{K}(1-\hat{p})]^n \geq \prod_{i=1}^n (\hat{K}-x_i) \quad e \quad [(\hat{K}+1)(1-\hat{p})]^n < \prod_{i=1}^n (\hat{K}+1-x_i)$$

b) e c) Basta verificar que $\hat{K}$ satisfaz as relações acima.

Exercício 9 Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes cujas distribuições parametrizadas por θ têm densidade $f_X(x|\theta)$ e $f_Y(y|\theta)$, respectivamente. Suponha que $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}$. Mostre que $I_{X,Y}(\theta) = I_X(\theta) + I_Y(\theta)$.

Se X e Y são independentes, $f_{X,Y}(x,y|\theta) = f_X(x|\theta) f_Y(y|\theta)$.
Logo, valem as condições de regularidade de FI.

$$I_{X,Y}(\theta) = E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f_{X,Y}(X,Y|\theta)\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f_X(X|\theta) + \frac{d}{d\theta}\log f_Y(Y|\theta)\right)^2\right]$$

$$= I_X(\theta) + I_Y(\theta) + 2\mathbb{E}\left[\frac{d}{d\theta}\log f_X(X|\theta)\frac{d}{d\theta}\log f(Y|\theta)\right]$$

independência

$$= I_X(\theta) + I_Y(\theta) + 2\mathbb{E}\left[\frac{d}{d\theta}\log f_X(x|\theta)\right]\mathbb{E}\left[\frac{d}{d\theta}\log f_Y(y|\theta)\right]$$

$$= I_X(\theta) + I_Y(\theta) + 2\int \frac{d}{d\theta} f_X(x|\theta)\,dx \int \frac{d}{d\theta} f_Y(y|\theta)\,dy$$

$$= I_X(\theta) + I_Y(\theta) + 2\left(\frac{d}{d\theta}1\right)\left(\frac{d}{d\theta}1\right)$$

$$= I_X(\theta) + I_Y(\theta).$$

Exercício 10 Seja $X \sim \text{Poi}(\theta)$ e defina $g(\theta) = \exp\{-3\theta\}$. $\Rightarrow \theta = -\frac{1}{3}\log\eta$

(a) Encontre o limite inferior de Cramér-Rao para estimadores não enviesados de $g(\theta)$.

(b) Se $\phi(X) = (-2)^X$, encontre $\text{Var}_\theta(\phi(X))$.

(c) Encontre o limite inferior de Cramér-Rao e de Chapman-Robbins para a variância de estimadores não enviesados de θ.

a) Denote $\eta = g(\theta)$. Vamos calcular $I_X(\eta)$:

$$I(\eta) = -\mathbb{E}_\eta\left[\frac{d^2}{d\eta^2}\log f(x|\eta)\right]$$

$$= -\mathbb{E}_\eta\left[\frac{d^2}{d\eta^2}\left(x\log\theta - \theta - \log x!\right)\right]$$

$$= -\mathbb{E}_\eta\left[\frac{d}{d\eta}\left(\frac{x}{\theta}\frac{d\theta}{d\eta} - \frac{d\theta}{d\eta}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}_\eta\left[\frac{x}{\theta^2}\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)^2 - \frac{x}{\theta}\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{d^2\theta}{d\eta^2}\right]$$

$$= \left(\frac{(d\theta/d\eta)^2}{\theta^{\cancel{2}}} - \cancel{\frac{d^2\theta/d\eta^2}{\theta}}\right)\underbrace{\mathbb{E}_\eta[x]}_{=\theta} + \cancel{\frac{d^2\theta}{d\eta^2}}$$

$$= \frac{1}{\theta}\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)^2 = -\frac{\log\eta}{\eta^2}$$

Assim, o limite inferior de Cramér-Rao é $\frac{n^2}{\log n}$.

b) $$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} = e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\theta)^k}{k!} = e^{-3\theta}$$

$$\mathbb{E}[\phi^2(X)] = \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^{2k} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} = e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4\theta)^k}{k!} = e^{3\theta}$$

Assim $Var_\theta(\phi(X)) = e^{3\theta} - e^{-6\theta}$.

c) $$I_X(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}(x\log\theta - \theta - \log x!)\right]$$

$$= -\mathbb{E}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{x}{\theta} - 1\right)\right]$$

$$= -\mathbb{E}\left[-\frac{x}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta}.$$

Cramér-Rao: $Var_\theta(T(X)) \geq \theta$

Chapman-Robbins:

$$Var_\theta\left(\frac{f(x|\theta')}{f(x|\theta)} - \cancel{1}\right) = Var_\theta\left(\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^x e^{-(\theta'-\theta)}\right) = e^{-2(\theta'-\theta)} Var_\theta\left(\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^x\right)$$

$$= e^{-2(\theta'-\theta)}\left(e^{-\theta+\theta'^2/\theta} - e^{2(\theta'-\theta)}\right)$$

$$= e^{\frac{(\theta-\theta')^2}{\theta}} - 1$$

$$E_\theta\left[\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^x\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\theta'}{\cancel{\theta}}\right)^k \frac{\cancel{\theta^k}}{k!} e^{-\theta} = e^{-\theta+\theta'}$$

$$E_\theta\left[\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^{2x}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^{2k} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} = e^{-\theta+\theta'^2/\theta}$$

Veja que $e^{\frac{x^2}{\theta}} \geq \frac{x^2}{\theta} + 1 \Rightarrow \theta \geq \frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{\theta}} - 1}$

Assim $$\sup_{\theta' \neq \theta}\left\{\frac{(\theta-\theta')^2}{e^{\frac{(\theta-\theta')^2}{\theta}} - 1}\right\} = \sup_{x \neq 0}\left\{\frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{\theta}} - 1}\right\} = \theta$$

Exercício 11 Suponha que n flechas são lançadas em um alvo circular de raio r e que a i-ésima flecha passa no ponto (X_i, Y_i). Assuma que os pares (X_i, Y_i) são independentes com distribuição $N(0, \theta I_2)$.

(a) Defina $R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$. Encontre a distribuição de R_i^2/θ para uma flecha arbitrária.

(b) Calcule a probabilidade da i-ésima aresta atingir o alvo.

(c) Encontre o MLE de θ e a distribuição assintótica do estimador.

a) $X_i \sim N(0, \theta)$ e $Y_i \sim N(0, \theta)$. Como $Cor(X_i, Y_i) = 0$, vale que X_i e Y_i são independentes, pois são normalmente distribuídas. Assim $X_i^2/\theta \sim \chi_1^2$ e $Y_i^2/\theta \sim \chi_1^2$, e portanto,

$$\frac{R_i^2}{\theta} \sim \chi_2^2.$$

Assim $R_i^2/\theta \sim Exp(1/2)$, em particular.

↳ Quantidade pivotal

b) $$\mathbb{P}(R_i^2 \leq r^2) = \mathbb{P}\left(\frac{R_i^2}{\theta} \leq \frac{r^2}{\theta}\right)$$
$$= 1 - e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\theta}}$$

c) $$f(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\theta} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta}(x_i^2 + y_i^2)\right\}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \theta^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^{n} R_i^2\right\}$$

$$\Rightarrow \lambda(\theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = -n \log \theta - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^{n} R_i^2 - n \log 2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta} \lambda(\theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^{n} R_i^2 = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} R_i^2.$$

$$\left.\frac{d^2}{d\theta^2} \lambda(\theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})\right|_{\theta = \frac{\sum R_i^2}{2n}} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} R_i^2$$
$$= \frac{1}{\theta^2}\left(n - \frac{\cancel{\sum R_i^2}}{\frac{1}{2n}\cancel{\sum R_i^2}}\right) = -\frac{n}{\theta^2} < 0,$$

logo $\hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} R_i^2$ é MLE para θ.

$$I_X(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{n}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} R_i^2\right]$$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}\sum \mathbb{E}\left[\frac{R_i^2}{\theta}\right]$$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{n}{\theta^2}\mathbb{E}\left[\frac{R_i^2}{\theta}\right]$$

$$= \frac{n}{\theta^2}$$

Logo $\sqrt{n}\,(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \theta^2)$, isto é,

$$\hat{\theta} \approx N(\theta, \theta^2/n)$$