Monitoria 26/07/2022

- $Y = f(x_1, \dots, x_n)$

  $f_X(x_1, \dots, x_n \mid y) = \dfrac{f_X(x_1, \dots, x_n)}{f_Y(y)}$, $y = f(x)$

- Teorema da Fatorização

$$f(x \mid \theta) = h(x)\, g(T \mid \theta)$$

- Rao-Blackwell (Raoblackewelização)

  Se U é estatística não viesada e T é suficiente

$$\delta(T) = E[U \mid T] = \int u\, f_{U|T}(u|t)\, du$$

↳ integrar

$$R(\theta, \delta) < R(\theta, U) \quad \text{(Perdas convexas)}$$

- Lehmann-Scheffé

  Se

  $T(x) = T(y) \Leftrightarrow f(x \mid \theta) = f(y \mid \theta)\, h(x, y)$, $\forall \theta$

  então T suficiente mínima.

16 Keener

Bahadur

completa ⇒ completa limitada

Se T é suficiente completa (limitada), então T é suficiente mínima

Basu

Se T é estatística suficiente completa e U é ancilar então T é independente de U.

6.31

$$\mathrm{Var}(T+U) = \mathrm{Var}(T) + \mathrm{Var}(U)$$
$$E[TU] = E[T]\,E[U]$$
$$f_{T,U}(t,u) = f_T(t)\, f_U(u)$$

- $R(\theta, \phi) = \mathrm{Var}\ \phi(X) + \text{Viés}(\phi(x))^2$

  $= E[(\phi(X) - \theta)^2]$

  → Função de Risco → Erro médio (em relação aos dados)

- UMVUE: $R(\theta, \phi) = \mathrm{Var}\ \phi(x)$

  variância mínima; viés $= 0$; MSE

Lehmann-Scheffé: δ não viesado e δ só depende de T (estatística suficiente completa), então δ é UMVUE.

→ não enviesado

$$\delta(T) = E[U|T]$$

$\Rightarrow \delta$ é UMVUE. $E[X] = E[E[X|Y]]$

- Método do momentos

- Máxima verossimilhança

Teorema da Invariância

Se $\hat{\theta}_{MLE}$ é MLE de θ, então $g(\hat{\theta}_{MLE})$ é MLE de $g(\theta)$.

MLE para família exponencial

- Informação de Fisher

$$I_X(\theta) = -E_\theta\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\log f(x|\theta)\right]$$

Teorema

$$E_\theta\Big[\underbrace{\frac{d}{d\theta}\log f(x|\theta)}_{\text{Função score}}\Big] = 0$$

- Limite de Cramér-Rao

$$\mathrm{Var}(\phi(x)) \geq \frac{\Big(\overbrace{\frac{d}{d\theta}E_\theta(\phi(x))}^{\text{Se } \phi \text{ é não enviesado, isso é } 1.}\Big)^2}{\boxed{I_X(\theta)}}$$

Vale a igualdade se, e somente, $\phi(x)$ e $\frac{d}{d\theta}\log f(x|\theta)$ são lineamente relacionados.

$$\frac{d}{d\theta}\log f(x|\theta) = a(\theta)\,\phi(X) + b(\theta)$$

Se $\phi(x)$ é não enviesado e $\frac{d}{d\theta}\log f(x|\theta) = a(\theta)\phi(x) + b(\theta)$, então $\phi(x)$ é UMVUE.

Keener 4.28

$$f(x|\theta) = c(\theta)h(x)\exp\{\pi(\theta)\phi(x)\}$$

↳ família exponencial

Assintótica: $n \to \infty$

- Consistência: $\phi_n(X_n) \xrightarrow{P} \theta \Rightarrow \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é consistente, $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|\phi_n(X_n) - \theta| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
$$P(|\phi_n(x_n) - \theta| \leq \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Lei dos Grandes Números:

$$\overline{X}_n \to E[X]$$

$$\begin{cases} \lim Var(\phi_n) = 0 \\ \lim Viés(\phi_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow E[(\phi_n - \theta)^2] \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Chebyshev

$$P(|\phi_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[(\phi_n - \theta)^2]}{\varepsilon^2}$$
$$= \frac{Var(\phi_n) + Viés(\phi_n)^2}{\varepsilon^2}$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Teorema Central do Limite

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$$

- MLE (em geral) é consistente

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \to N(0, \underbrace{I_X(\theta)^{-1}}_{\approx I_X(\hat{\theta}_{MLE})^{-1}})$$

Verossimilhança contínua

$$f(x|\theta) = h(x)\, c(\theta)\, \exp\{\widetilde{R(\theta)} \cdot T(x)\}$$

$$f(x|\eta) = h(x)\, c(\theta)\, \exp\{\eta \cdot T(x)\} \to \text{natural canônica}$$

η ↓ parâmetro natural

Lista 2-Extra 1

$$P_\sigma = \{N(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}\}$$

- $\bar{X}$ é estatística suficiente e completa.

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2\right\} \exp\left\{\boxed{\frac{\mu}{\sigma^2}} \sum x_i\right\} \exp\left\{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right\}$$

→ Parâmetro natural

$$\eta = R(\mu) = \mu/\sigma^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum x_i^2} \exp\left\{\boxed{\frac{n\mu}{\sigma^2}} \bar{x}\right\}$$

$$\to \eta' = \frac{n\mu}{\sigma^2} \in \mathbb{R}$$

Como $\mathbb{R} \supset (0,1)$, que é aberto, $\bar{X}$ é suficiente e completa.

$$E_\theta[g(\bar{X})] = 0 \Rightarrow g = 0$$

- $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} = \text{Gamma}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\boxed{x_i - \bar{x}}\right)^2$$

Ancilar

$$\boxed{X_i - \bar{X}} \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$$

$$E[X_i - \bar{X}] = E[X_i] - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} E[X_j] = \mu - \mu = 0$$

$$Var(X_i - \bar{X}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$(x_i - \bar{x})^2$ não depende de μ

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ não depende de μ

$\Rightarrow S^2$ não depende de $\mu \Rightarrow S^2$ é ancilar

$\begin{cases} S^2 \text{ é ancilar e } \bar{X} \text{ é suficiente completa, então} \\ \bar{X} \text{ e } S^2 \text{ são independentes} \end{cases}$

Para cada σ fixado, $\bar{X}$ independe de S^2

$\forall \sigma, \forall \mu$, $\bar{x}$ e S^2 são independentes

+ Exercício Basu 6.36