Lista 2 - Inferência Estatística

Livro Robert Keener

6. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Beta(\alpha, \beta)$

a) A densidade conjunta de uma amostra aleatória é

$$f_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1} \left(\prod_{i=1}^{n} 1-x_i\right)^{\beta-1} \mathbb{1}\{0 \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} \leq 1\}$$

Pelo Teorema da Fatorização,

$$T(\mathbf{x}) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i, \prod_{i=1}^{n} 1-x_i\right)$$

é estatística suficiente. Além disso, se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (0,1)^n$,

$$\frac{f_{\alpha,\beta}(\mathbf{x})}{f_{\alpha,\beta}(\mathbf{y})} = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i}\right)^{\alpha-1} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1-x_i}{1-y_i}\right)^{\beta-1}.$$

Para que essa razão não dependa de α

$$\frac{f_{2,1}(\mathbf{x})}{f_{2,1}(\mathbf{y})} = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} = 1 = \frac{f_{1,1}(\mathbf{x})}{f_{1,1}(\mathbf{y})} \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} y_i.$$

Já para que não dependa de β,

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1-x_i}{1-y_i} = 1 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} 1-x_i = \prod_{i=1}^{n} 1-y_i,$$

o que implica que $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y})$ e T é estatística suficiente mínima pelo Teorema de Lehmann-Scheffé.

b) Se $\alpha = 2\beta$, $T(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^2(1-x_i)$

é estatística suficiente mínima por Lehmann-Scheffé.

c) Se $\alpha = \beta^2$, temos o caso inicial (demonstração similar)

7. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p_i)$ independentes, com

$$\log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) = \alpha + \beta \cdot t_i$$

A densidade conjunta é: $\quad p_i = \text{expit}(\alpha + \beta \cdot t_i)$

$$
\begin{aligned}
f_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n p_i^{x_i}(1-p_i)^{1-x_i} \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{e^{(\alpha+\beta t_i)x_i}}{(1+e^{\alpha+\beta t_i})^{x_i}} \frac{1^{1-x_i}}{(1+e^{\alpha+\beta t_i})^{1-x_i}} \\
&= \frac{e^{\alpha \sum_{i=1}^n x_i + \beta \sum t_i x_i}}{\prod_{i=1}^n 1 + e^{\alpha+\beta t_i}} \rightsquigarrow \text{só depende de } \alpha \text{ e } \beta.
\end{aligned}
$$

Note que essa densidade pertence à família exponencial com estatística suficiente

$$T(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n t_i x_i\right),$$

que é mínima, pois o espaço dos parâmetros $\mathbb{R}^2_+$ contém aberto.

9. Lista 1.

12. $Z_1, Z_2 \overset{iid}{\sim} N(0,1)$,

$$X = Z_1, \quad Y = (Z_1 + Z_2)\theta.$$

a) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$, em que $(Z_1, Z_2) \sim N(0, I_2)$.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta & \theta \end{bmatrix} \Rightarrow AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ 0 & \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 2\theta^2 \end{bmatrix}$.

Portanto $(X, Y) \sim \text{Normal}\left(0, \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 2\theta^2 \end{bmatrix}\right)$

$\sigma_X = 1, \ \sigma_Y = \sqrt{2}\theta, \ \rho = 1/\sqrt{2}$

b) Seja a amostra $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$.

$$f_\theta(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n \cancel{2^{\frac{n}{2}}} \theta^n \cancel{2^{-n/2}}} \exp\left\{-\left[\sum x_i^2 - \frac{1}{\theta}\sum x_i y_i + \frac{1}{2\theta^2}\sum y_i^2\right]\right\}$$

$$= e^{-\sum x_i^2} (2\pi\theta)^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta^2}\left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\theta \sum x_i y_i\right]\right\},$$

logo $T(x,y) = (\sum_{i=1}^n y_i^2, \sum x_i y_i)$ é estatística suficiente mínima por Lehmann-Scheffé. Basta ver que

$$\log \frac{f_\theta(x,y)}{f_\theta(\tilde{x},\tilde{y})} = -\frac{1}{2\theta^2}\left[\sum y_i^2 - \sum \tilde{y}_i^2 - 2\theta\left(\sum x_i y_i - \sum \tilde{x}_i \tilde{y}_i\right)\right]$$

não depende de θ implica $\sum y_i^2 = \sum \tilde{y}_i^2$ e $\sum x_i y_i = \sum \tilde{x}_i \tilde{y}_i$.

15. Sabemos que se $X \sim N(\theta, 1)$,

$$E_\theta[g(x)] = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \text{ q.c.}$$

Considere

$$\int f(x) e^{\theta x} = \sqrt{2\pi}\, e^{\theta^2/2}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2} + \theta x - \frac{\theta^2}{2}} dx = 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2} dx = 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

Com isso, como $\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2} dx = 1$, temos que $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ é solução. Para a unicidade, suponha que existe outra solução $g(x)$. Assim,

$$\int f(x) e^{\theta x} dx = \int g(x) e^{\theta x} dx = \sqrt{2\pi}\, e^{\theta^2/2}$$

$$\times\ e^{-\frac{\theta^2}{2}} / \sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow \int (f(x) - g(x)) e^{\theta x} dx = 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int (f(x) - g(x)) e^{x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2} dx = 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Pela completude $(f(x)-g(x))e^{x^2/2}=0 \Rightarrow f=g$ quase sempre.

16. Lista 1.

Livro Casella Bergers

6.8. Já provamos na lista 1 que $T(X_1,\dots,X_n)=(X_{(1)},\dots,X_{(n)})$ é estatística suficiente. Falta provar que é mínima, quando não há conhecimento adicional sobre f. Seja

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Assim para $x,y\in\mathbb{R}^n$,

$$\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i-\theta)}{\prod_{i=1}^n f(y_i-\theta)}=\prod_{i=1}^n \frac{1+(y_i-\theta)^2}{1+(x_i-\theta)^2}=\prod_{i=1}^n \frac{1+y_i^2}{1+x_i^2}$$

não depende de θ. Defina o polinômio

$$p_x(\theta)=\prod_{i=1}^n \frac{\theta^2-2\theta x_i+x_i^2+1}{1+x_i^2},$$

de ordem $2n$. Sabemos que ele tem $2n$ raízes da forma

$$x_j \pm i,\quad j=1,\dots,n.$$

Como $p_x=p_y$, temos que eles tem as mesmas raízes, portanto $\forall i=1,\dots,n$, $\exists! j\in\{1,\dots,n\}$, tal que

$$x_i=y_j.$$

Logo $(X_{(1)},\dots,X_{(n)})=(Y_{(1)},\dots,Y_{(n)})$ é estatística suficiente mínima para Cauchy, que pertence a família locação.

6.9. Up to you.

6.31. (a) Extra 1.

(b) Lista adicional

(c) $E[X^k] = E[(X/Y)^k Y^k]$

$$= E[(X/Y)^k]E[Y^k]$$

$\Rightarrow E[(X/Y)^k] = E[X^k]/E[Y^k]$, quando $E[Y^k] \neq 0$.

Seja $X_1, \dots, X_n \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ e $T = \sum_j X_j$. Note que

$$f_\beta(x) = \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha)^n} \exp\left\{-\beta T\right\}$$

Logo T é estatística suficiente completa, pois f_β pertence à família exponencial. Lembro que $\beta^{-1} X_i \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$, logo a distribuição de $\beta^{-1}(X_1, \dots, X_n)$ não depende de β e, portanto, $\beta^{-1} X_{(i)}$ não depende de β. Mas

$$\frac{X_{(i)}}{T} = \frac{\beta^{-1} X_{(i)}}{\beta^{-1} T}, \quad \beta^{-1}T \sim \text{Gamma}(n\alpha, 1)$$

que tem distribuição que não depende de β. Com isso $X_{(i)}/T$ é estatística anciliar. Pelo Teorema de Basu, T e $X_{(i)}/T$ são independentes. Logo

$$E[X_{(i)} \mid T] = E\left[\frac{X_{(i)}}{T} \cdot T \,\middle|\, T\right]$$

$$= T \cdot E\left[\underbrace{\boxed{\frac{X_{(i)}}{T}}}_{\text{independe de } T} \,\middle|\, \cancel{T}\right]$$

$$= T \cdot \frac{E[X_{(i)}]}{E[T]} \qquad \frac{X_{(i)}}{T} \perp T$$

Questões extras

1. $$f_\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum x_i^2 + n\mu^2\right) + \frac{\mu n}{\sigma^2}\bar{x}\right\},$$

logo, como pertence à família exponencial, $\bar{x}$ é estatística suficiente completa para μ.

O resultado $\frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi^2_{n-1}$ é bastante conhecido.

Logo $S_n^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{\sigma^2}{2(n-1)}\right)$ não depende de μ e, portanto, é estatística anciliar.

Concluímos, pelo Teorema de Basu, que $\bar{X}$ e S_n^2 são independentes. Note que para cada σ^2, $\bar{X}$ é independente de S_n^2, isto é,

$$f_{\bar{X}, S_n^2}(x, y \mid \mu, \sigma) = f_{\bar{X}}(x \mid \mu, \sigma) f_{S_n^2}(y \mid \mu, \sigma).$$

Logo, desconhecer σ não afeta essas distribuições.

2. Exercício 6.8

3. Vamos aplicar Lehmann-Scheffé. Seja $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\log \frac{f_\theta(\mathbf{x})}{f_\theta(\mathbf{y})} = -\sum_{i=1}^n |x_i - \theta| + \sum_{i=1}^n |y_i - \theta|$$

$$= -\sum_{x_i \leq \theta} (\theta - x_i) - \sum_{x_i > \theta} x_i - \theta + \sum_{y_i \leq \theta} (\theta - y_i) + \sum_{y_i > \theta} (y_i - \theta)$$

$$= \theta \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i > \theta\} - \underbrace{\mathbb{1}\{x_i \leq \theta\}}_{1 - \mathbb{1}\{x_i > \theta\}} + \mathbb{1}\{y_i \leq \theta\} - \mathbb{1}\{y_i > \theta\}$$

$$+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\mathbb{1}\{x_i > \theta\}} x_i - (-1)^{\mathbb{1}\{y_i > \theta\}} y_i$$

$$= 2\theta \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i > \theta\} - \mathbb{1}\{y_i > \theta\} - n + \sum_{i=1}^n (-1)^{\mathbb{1}\{x_i > \theta\}} x_i - (-1)^{\mathbb{1}\{y_i > \theta\}} y_i$$

não depende de θ. Seja $z_{(1)}, \dots, z_{(2n)}$ uma ordenação de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Considere $i = \min\{j : z_{(j)} < z_{(j+1)}\}$. Se $z_{(i)} = z_{(1)}, \forall i$, temos que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ têm a mesma estatística de ordem. Caso contrário, $i < 2n$. Faça $\theta \in (z_{(i)}, z_{(i+1)})$. Nesse intervalo, essa função só não varia se $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i > \theta\} = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{y_i > \theta\}$. Observe que isso deve ocorrer para todo intervalo, o que ocorre se as estatísticas de ordem de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são iguais. Logo, a estatística de ordem é suficiente mínima.

4. a) $$f_\theta(x_1,\dots,x_n) = \theta^{-2n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)\right\}\mathbb{1}\{\min x_i > \theta\}$$

$$= \theta^{-2n}\exp\left\{-\frac{n\bar{x}}{\theta^2} + \frac{1}{\theta}\right\}\mathbb{1}\{x_{(1)} > \theta\},$$

Denote $T(x) = (\bar{x}, x_{(1)})$. Suponha que

$$\log\frac{f_\theta(\mathbf{x})}{f_\theta(\mathbf{y})} = -\frac{n}{\theta^2}\left(\bar{x}-\bar{y}\right)$$

não depende de θ. Assim fazendo $d/d\theta$, temos que

$$2n\theta^{-3}(\bar{x}-\bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

Suponha que $\min\{x_i\} > \min\{y_i\}$ e tome $\theta \in (\min y_i, \min x_i)$. Assim $\log f_\theta(x)/f_\theta(y)$ não está bem definido, o que é um absurdo. Com isso $x_{(1)} \leq y_{(1)}$. Analogamente $y_{(1)} \leq x_{(1)}$. Concluo que $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y})$ e T é estatística suficiente mínima.

b) Note que $X_i - \theta \sim \text{Exponencial}(\theta^2)$. Assim,

$$\frac{X_i-\theta}{\theta^2} \sim \text{Exp}(1),\ i=1,\dots,n$$

Portanto a distribuição de $(X_{(j)}-\theta)/\theta^2$ independe de θ. Em particular, a distribuição de

$$\frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\bar{X} - X_{(1)}} = \frac{(X_{(n)}-\theta)/\theta^2 - (X_{(1)}-\theta)/\theta^2}{(\bar{X}-\theta)/\theta^2 - (X_{(1)}-\theta)/\theta^2}$$

não depende de θ. Se T fosse completo, por Basu,

$$E_\theta\left[\frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\bar{X} - X_{(1)}}\,\middle|\, T\right] = \frac{1}{\bar{X}-X_{(1)}}E_\theta[X_{(n)}] - \frac{X_{(1)}}{\bar{X}-X_{(1)}},$$

isto é, $E_\theta[X_{(n)}] = E_\theta[X_{(n)} \mid T]$. Mas isso não é verdade, pois se $X_{(1)}$ for grande, $X_{(n)}$ também será.