Lista 4 - Inferência Estatística

Livro Robert Keener

17. $X_1, X_2, \ldots$ iid Poisson(θ)

$$W(\theta) = \log f_\theta(X) = -\theta + X \log \theta - \log x!$$

Assim $I(\theta) = \mathbb{E}[X/\theta^2] = 1/\theta$. Com isso,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \theta),$$

logo $\sqrt{n}\left(\dfrac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\theta}}\right) \xrightarrow{d} N(0,1)$.

Usando $I(\hat{\theta}_n) \approx I(\theta)$, temos que

$$\sqrt{n}(\sqrt{\hat{\theta}_n} - \sqrt{\theta}) \xrightarrow{d} N(0,1),$$

com $g(x) = \sqrt{x}$.

21. $f_\theta(x) = \dfrac{\theta e^{\theta x}}{2 \sinh \theta}$, $x \in (-1, 1)$. $Y_i = \mathbb{1}\{X_i > 0\}$

a) $\lambda(\mathbf{x}|\theta) = \log f_\theta(x_1, \ldots, x_n)$

$$= n \log \theta + \theta \sum_{i=1}^n x_i - n \log 2 - n \log \sinh \theta$$

Logo

$$\frac{d}{d\theta} \lambda(\mathbf{x}|\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n x_i - n \coth \theta = 0$$

$\Rightarrow \coth(\theta) - 1/\theta = \bar{x}$. Além disso,

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \lambda(x|\theta) = -\frac{n}{\theta^2} + n \,\text{csch}^2 \theta < 0$$

deve ser satisfeito.

b) $Y_i \sim$ Bernoulli$(p(\theta))$, em que,

$$p(\theta) = \int_0^1 \frac{\theta e^{\theta x}}{2 \sinh \theta} dx = \frac{e^\theta - 1}{e^\theta - e^{-\theta}}$$

O MLE para $p(\theta)$ é $\bar{Y}$, portanto $p^{-1}(\bar{Y})$ é o MLE para θ.

Livro Casella - Berger

7.1.
$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \{0,1\} \\ 2, & \text{se } x = 2 \\ 3, & \text{se } x \in \{2,3,4\} \end{cases}$$

7.2. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$

a) $f_\beta(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{\beta^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha)} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} e^{-\beta \sum_{i=1}^n x_i}$,

logo $\dfrac{d}{d\beta} \log f_\beta(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{\alpha n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$

$\Rightarrow \hat{\beta} = 1/n\alpha \sum_{i=1}^n x_i$ é MLE para β.

$\dfrac{d^2}{d\beta^2} \log f_\beta(x_1, \dots, x_n) = -\dfrac{\alpha}{\beta^2} < 0 \Rightarrow \hat{\beta}$ minimizador global

b) $\dfrac{d}{d\alpha} \log f_\alpha(x_1, \dots, x_n) = n \log \beta - \psi(\alpha) + \sum_{i=1}^n \log x_i = 0$

$\Rightarrow \psi(\alpha) = \sum_{i=1}^n \log x_i + n \log \beta$

7.6. (a) $f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-2} \mathbb{1}\{\min\{x_i\} \geq \theta\}$

Logo $T(x) = \left(\prod_{i=1}^n x_i, x_{(1)}\right)$ é estatística suficiente.

b) Note que a densidade cresce em θ, mas é limitada por $\min\{x_i\}$. Logo o MLE é $\hat{\theta} = X_{(1)}$.

c) $E_\theta[X_1] = \displaystyle\int_\theta^\infty \frac{\theta}{x} dx = \theta \ln(x) \Big|_\theta^\infty = \infty$, logo o método dos momentos não existe dessa forma. Mas

$$E_\theta[X_1^{1/2}] = \int_\theta^\infty \frac{\theta}{x^{3/2}}\,dx = -\theta x^{-1/2}\Big|_\theta^\infty = \sqrt{\theta}.$$

Logo $\hat{\theta} = (\sum_{i=1}^n X_i^{1/2})^2$ é estimador por método de momentos (em um sentido)

7.11. a) $f(x_1,\dots,x_n) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1}$. Assim

$$\frac{d}{d\theta}\log f(x_1,\dots,x_n) = \frac{n}{\theta} + \sum \log x_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log x_i\right)^{-1}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\log f(x_1,\dots,x_n) = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \Rightarrow \hat{\theta} \text{ é MLE para } \theta.$$

Defina $Y_i = -\log X_i$. Assim $X_i = e^{-Y_i}$

$$\begin{aligned} f_{Y_i}(y) &= f_{X_i}(e^{-y})\,e^{-y} \\ &= \theta(e^{-y})^{\theta-1} e^{-y} \\ &= \theta e^{-\theta y} \end{aligned}$$

$\Rightarrow Y_i \sim \text{Exponencial}(\theta)$. Com isso

$$T = -\sum_{i=1}^n \log X_i \sim \text{Gamma}(n, \theta)$$

$\Rightarrow \hat{\theta} = n/T = n(1/T) = n\,\text{InvGamma}(n,\theta)$

$\Rightarrow \hat{\theta} \sim \text{InvGamma}(n, n\theta)$

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} = \underbrace{\boxed{\frac{n^2}{(n-1)^2}}}_{\to 1}\ \underbrace{\boxed{\frac{\theta^2}{(n-2)}}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

b) $X_i \sim \text{Beta}(\theta, 1)$. Assim $E[X_i] = \frac{\theta}{\theta+1}$, logo

$\bar{X}(\theta+1) = \theta \Rightarrow$

$$\hat{\theta}_{MM} = \bar{X}/(1-\bar{X})$$

7.12. $X_1, \dots, X_n$ iid com $\mathbb{P}_\vartheta(X=x) = \vartheta^x (1-\vartheta)^{1-x}$

a) $E[X] = \vartheta \Rightarrow \hat{\vartheta}_{MM} = \bar{X}$

$$\lambda(\vartheta|x) = \log \mathbb{P}_\vartheta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$
$$= \log \vartheta \sum_{i=1}^n x_i + \log(1-\vartheta) \sum_{i=1}^n (1-x_i)$$
$$\frac{d}{d\vartheta} \lambda(\vartheta|x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\vartheta} - \frac{\sum_{i=1}^n 1-x_i}{1-\vartheta} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\vartheta} - \cancel{1} = \frac{n - \cancel{\sum} x_i}{\sum x_i} \Rightarrow \vartheta = X$$
$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} \lambda(\vartheta|x) = -\frac{\sum x_i}{\vartheta^2} - \frac{\sum_{i=1}^n 1-x_i}{(1-\vartheta)^2} < 0, \text{ logo}$$
$$\hat{\vartheta}_{MLE} = \begin{cases} \bar{x}, & \text{se } \bar{x} < 1/2 \\ 1/2, & \text{se } \bar{x} \geq 1/2 \end{cases} \Rightarrow \text{Binomial}$$

b) e c) Fazer contas e verificar menor erro quadrático esperado.

7.19. $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

(a) $$f_{\beta,\sigma^2}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2\right\}$$
$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum y_i^2 + \frac{\beta}{\sigma^2} \sum x_i y_i - \frac{\beta^2}{2\sigma^2} \sum x_i^2\right\}$$

logo $T(x) = (\sum_{i=1}^n y_i^2, \sum_{i=1}^n x_i y_i)$ é estatística suficiente.

(b) $$\frac{d}{d\beta} \log f_{\beta,\sigma^2}(y_1, \dots, y_n) = \frac{\sum x_i y_i}{\sigma^2} - \frac{\beta}{\sigma^2} \sum x_i^2 = 0$$
$$\Rightarrow \hat{\beta} = \sum_{i=1}^n x_i y_i / \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Além disso, $\frac{d^2}{d\beta^2} \log f_{\beta,\sigma^2}(y_1,\dots,y_n) = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2} < 0$,

o que mostra que $\hat{\beta}$ é MLE para β. Além disso,

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E}[Y_i]}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \beta.$$

(c) $$\frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} Y_i \sim N\left(\frac{\beta x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \frac{x_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2}\sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2/\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2).$$

7.37 $X_1,\dots,X_n \sim \mathcal{U}nif(-\theta,\theta)$

É fácil ver que $T(x) = \max\{|x_i|\}$ é estatística suficiente. Vamos verificar que é completa. Temos que $|x_i| \sim U(0,\theta)$. Assim

$$f_T(t) = \frac{d}{dt}\prod_{i=1}^n \mathbb{P}(|X_i| \le t)$$

$$= \theta^{-n} n t^{n-1}, \quad t \in [0,\theta).$$

Logo

$$E_\theta[g(T)] = \int_0^\theta g(t)\cancel{\frac{n}{\theta^n}} t^{n-1}dt = 0, \ \forall\theta$$

$$\Rightarrow g(\theta)\theta^{n-1} = 0, \ \forall\theta \Rightarrow g(\theta) = 0 \text{ e } T \text{ é completa.}$$

$$E[T] = \int_0^\theta \left(\frac{t}{\theta}\right)^n n\, dt = \int_0^1 n x^n \theta\, dx = \frac{n}{n+1}\theta$$

$$\Rightarrow \delta(x) = \frac{n+1}{n}\max\{|x_i|\} \text{ é UMVUE.}$$

7.38. Aplicar a relação

$$\frac{d}{d\theta} \log f(x|\theta) = a(\theta)(S(x) - g(\theta))$$

a estimadores que atingem o limite inferior de Cramér-Rão

Extras

1. $\log f_\theta(x_1,\dots,x_n) = \log 2^{-n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} |x_i - \theta|\right\}$

$$= -\sum_{i=1}^{n} |x_i - \theta| - n \log 2$$

Fazendo $\theta \to \pm\infty$, $|x_i - \theta| \to +\infty$, para $i = 1,\dots,n$. existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\theta \notin [-M, M] \Rightarrow \log f_\theta(\mathbf{x}) < \log f_0(\mathbf{x})$. Além do mais, como $\log f_\theta(\mathbf{x})$ é contínua, sabemos que existe maximizador em $[-M, M]$. Ele é único, pois a função módulo. Além do mais, como $-\log f_\theta(\mathbf{x})$ é convexa, todo mínimo local é global.

Se $\theta \neq 0$,

$$\frac{d}{d\theta} \log f_\theta(\mathbf{x}) = -\sum_{\{j:\, x_j > \theta\}} (-1) - \sum_{\{j:\, x_j < \theta\}} 1$$

$$= \#\{j : x_j > \theta\} - \#\{j : x_j < \theta\}$$

Logo $\partial \log f_\theta(x) = \{\#\{x_j > \theta\} - \#\{x_j < \theta\}\}$. Assim, se $\#\{x_j > \theta\} = \#\{x_j < \theta\} = n/2$, temos que θ é maximizador. Mas $\theta \in [x_{(\frac{n}{2})}, x_{(\frac{n}{2}+1)}]$ satisfaz essa condição. Logo o MLE não é único. Defina $g'(\theta) = \cos\theta / \theta$. Assim

$$h(\theta) = (\operatorname{sen}(\theta)/\theta,\ \cos(\theta)/\theta)$$

é invertível, $h^{-1}(x,y) = \arctan(x/y)$. Assim $g(\hat{\theta}_{MLE})$ é MLE de $g(\theta)$. Veja que ele não é único e não é definido em $\hat{\theta}_{MLE} = 0$.