Lista 5

Robert Keener

9.1. $G_n(t) = nZ_n(1-t)t^n - t$

$g(t) = E[G_n(t)] = -t$

a) Fixe $t \in [0,1]$. Se $t = 0, 1$, $G_n(t) = -t$. Portanto, $G_n(t) - g(t) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow G_n(t) \xrightarrow{P} g(t)$.

Se $t \in (0,1)$, quero mostrar que

$$nZ_n(1-t)t^n \xrightarrow{P} 0$$

Tome $\varepsilon > 0$. Assim,

$$P(|nZ_n(1-t)t^n| > \varepsilon) = P(|Z_n| > \varepsilon t^{-n}/(1-t)n)$$
$$\leq (1-t)^2 n^2 t^{2n}/\varepsilon^2$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

visto que $\lim_{n\to\infty} n t^n = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{t^{-x}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln t)^{-1}}{t^{-x}} = 0$

Concluo que $G_n(t) \xrightarrow{P} g(t)$.

b) $\sup_{t\in[0,1]} n(1-t)t^n = n \max_{t\in[0,1]} (1-t)t^n$, pois $[0,1]$ é compacto, logo, existe máximo. Como não está nas extremidades, pois a função se anula lá, o máximo deve estar em $t^* \in (0,1)$:

$$\frac{d}{dt}(1-t)t^n \Big|_{t=t^*} = 0 \Rightarrow nt^{n-1} + (n+1)t^n = 0$$

$$\Rightarrow n + (n+1)t = 0$$

$$\Rightarrow t^* = n/n+1$$

Logo $\sup n(1-t)t^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(n+1)} = e^{-1}$

c) $\| G_n - g \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |n Z_n (1-t) t^n|$

$$= |Z_n| \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \overset{P}{\nrightarrow} 0$$

d) $P(|T_n| \leq \varepsilon) = P(G_n(t) \leq \varepsilon, \forall t \in [0,1])$

$$= P(|Z_n| \leq \varepsilon t^{-n} n^{-1}/(1-t), \forall t \in [0,1])$$

$$\leq P(|Z_n| \leq e^{-1}) \nrightarrow 1,$$

pois não depende de n.

9.2. Seja $\hat{\theta}_n = \mu^{-1}(\bar{X}_n)$ e $\theta = \mu^{-1}(\mu(\theta))$, que estão bem definidas pois μ é estritamente monotônica, logo injetiva. Além disso, pelo Teorema da Função Inversa

$$\frac{d\mu^{-1}(\eta)}{d\eta} = \frac{1}{\mu'(\mu^{-1}(\eta))}.$$

Com isso, pelo método Delta,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta) \cdot [\mu^{-1\prime}(\mu(\theta))]^2),$$

que implica,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta)/\mu'(\theta)^2)$$

9.3. $$\left| \int_0^1 [W_n(t) - f(t)] dt \right| \leq \int_0^1 |W_n(t) - f(t)| dt$$

$$\leq \| W_n - f \|_\infty \xrightarrow{P} 0$$

9.8. Sejam $S_X^2 = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})/m-1$,

$S_Y^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})/n-1$

Sabemos que $(m-1) S_X^2/\sigma_X^2 \sim \chi^2_{m-1}$

$(n-1) S_Y^2/\sigma_Y^2 \sim \chi^2_{n-1}$

Portanto,

$$F = \frac{S_y^2/\sigma_y^2}{S_x^2/\sigma_x^2} \sim F(n-1, m-1).$$

Seja $1-\alpha = \mathbb{P}(c_1 < F < c_2)$

$$= \mathbb{P}\left(S_x^2/S_y^2\, c_1 < \sigma_x^2/\sigma_y^2 < S_x^2/S_y^2\, c_2 \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{S_x^2}{S_y^2} c_1} < \frac{\sigma_x}{\sigma_y} < \sqrt{\frac{S_x^2}{S_y^2} c_2} \right)$$

9.13. (X_i, Y_i) iid com $X_i \sim N(0,1)$, $Y_i | X_i \sim N(X_i\theta, 1)$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y_i - x_i\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (y_i - \theta x_i)^2 \right\}$$

→ log-verossimilhança

a) $$\ell(\theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (y_i - \theta x_i)^2 - n \log(2\pi).$$

Assim

$$\frac{d}{d\theta} \ell(\theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \theta x_i) x_i = 0$$

implica $\theta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ e, portanto,

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

é único ponto crítico (com prob. 1).

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \ell(\theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} -x_i^2 < 0$$

e, portanto, $\hat{\theta}$ é MLE para θ.

b) $$I(\theta) = -E_\theta\left[\frac{d^2}{d\theta^2} \ell(\theta | x_i, y_i) \right] = E[X_i^2] = 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

c) Vamos verificar as condições do Teorema 9.14

1. ✓
2. $A = \mathbb{R}^2$
3. $\partial^2 f_\theta(x,y)/\partial\theta^2$ existe e é contínua em θ.
4. A informação de Fisher existe.
5. Tome $\theta \in \mathbb{R}$,

   $\| 1_{[\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon]} x^2 \|_\infty = x^2 \Rightarrow E_\theta[x^2] < +\infty.$
6. Temos, pela LGN,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i \xrightarrow{P} E[XY]$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 \xrightarrow{P} Var(X) = 1.$$ Com isso,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} E[XY] = E[X E[Y|X]] = \theta$$

pelo Teorema de Slutsky.

Com isso,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Obs.: O Teorema 7.57 do Schervish é mais direto para integrantes da Família Exponencial.

d) Seja c_1 e c_2 tal que

$$\Phi(c_2) - \Phi(c_1) = 1-\alpha.$$

Assim,

$$P\left(\hat{\theta} - \frac{c_1}{\sqrt{n}} > \theta > \hat{\theta} - \frac{c_2}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

visto que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \approx N(0,1).$$

e) A informação de Fisher observada é $-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}l(\theta|\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n X_i^2$.
Nesse caso, o intervalo de confiança assintótico é dado por

$$\left(\hat{\theta} - c_2/(\Sigma_{i=1}^n X_i^2)^{1/2},\ \hat{\theta} - c_1/(\Sigma_{i=1}^n X_i^2)^{1/2}\right),$$

visto que

$$\sqrt{nI(\theta)}\,(\hat{\theta}_n-\theta)\to N(0,1)$$

e $nI(\theta)$ é estimado por $\sum_{i=1}^n X_i^2$.

f) Note que

$$\left[\sum_{i=1}^n X_i^2\right]^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)=\frac{\sum_{i=1}^n X_iY_i-\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)\theta}{\left[\sum_{i=1}^n X_i^2\right]^{1/2}}$$

Condicionado em $X_1,\dots,X_n$, $X_iY_i\sim N(\theta X_i^2, X_i^2)$.
Logo $\sum_{i=1}^n X_iY_i\sim N\left(\theta\sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$, que implica que, condicionado em $X_1,\dots,X_n$,

$$\left[\sum_{i=1}^n X_i^2\right]^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)\sim N(0,1).$$

Então,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i^2\right]^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)\le x\right)&=\mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(\left[\sum X_i^2\right]^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)\le x\,|\,X_1,\dots,X_n\right)\right]\\&=\mathbb{E}[\Phi(x)]\\&=\Phi(x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\left[\sum_{i=1}^n X_i^2\right]^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)\sim N(0,1).$$

9.21. $X_1,\dots,X_n$ iid com $f_\theta(x)=\theta e^{\theta x}/2\sinh\theta$, $x\in(-1,1)$ e $Y_i=1\{X_i>0\}$. Se $\theta=0$, $X_i\sim U[-1,1]$.

a) $$\ell(\theta|\mathbf{x})=\begin{cases}n(\ln\theta-\ln(\sinh\theta))+\theta\sum_{i=1}^n x_i-n\ln 2, & \theta\neq 0\\ 0 & ,\theta=0\end{cases}$$

Logo

$$\frac{d}{d\theta}\ell(\theta|\mathbf{x})=n\left(\frac{1}{\theta}-\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\right)+\sum_{i=1}^n x_i^2=0$$

implica que $\hat{\theta}_x$ é solução de

$$\frac{1}{\theta}-\coth\theta=\bar{X}$$

ou $\hat{\theta}_x=0$, dependendo do sinal de $\ell(\theta|\mathbf{x})$ se $\theta\neq0$.

b) $Y_i \overset{ind}{\sim} \text{Bernoulli}(\mathbb{P}(X_i > 0))$.

Se $\theta \neq 0$,

$$\mathbb{P}_\theta(X_i > 0) = \int_0^1 \frac{\theta e^{\theta x}}{2\sinh\theta}\,dx = \frac{e^\theta - 1}{2\sinh\theta} = \frac{e^\theta - 1}{e^\theta - e^{-\theta}}.$$

Se $\theta = 0$, $\mathbb{P}(X_i > 0) = 1/2$.

Note que $\lim_{\theta \to 0} \frac{e^\theta - 1}{e^\theta - e^{-\theta}} = \lim_{\theta \to 0} \frac{e^\theta}{e^\theta + e^{-\theta}} = \frac{1}{2}$

Com isso, o MLE para $p = \mathbb{P}(X_i > 0)$ é $\hat{p} = \overline{Y}$.

$$p = \frac{e^\theta - 1}{e^\theta - e^{-\theta}} \Rightarrow \frac{p}{e^\theta} = \frac{1 - e^{-\theta}}{e^\theta - e^{-\theta}} = 1 - p$$

$$\Rightarrow \theta = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

e, pela invariância,

$$\hat{\theta}_y = \log\left(\frac{\overline{Y}}{1 - \overline{Y}}\right)$$

é MLE para θ.

9.33. $X_1, X_2, \ldots \overset{iid}{\sim} Q_\theta$, $\theta \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^p$.

a) $\sqrt{n}\, I(\theta)^{1/2} (\hat{\theta}_n - \theta) \Rightarrow N(0, I_p)$ pelo Teorema de Slutsky.

9.34. $X_1, X_2, \ldots \overset{iid}{\sim} Q_\theta$, $\theta = (\beta, \lambda)$

a) Tome $x \in \mathbb{R}_+$. Quero provar que $\{F_{M_n}(x)\}_n$ é convergente.
Note que, para $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\sqrt{n}\sqrt{(\hat{\theta}_n-\theta)I(\theta)(\hat{\theta}_n-\theta)} > \sqrt{n}\,\varepsilon\right) \overset{\text{Chebyshev}}{\leq} 2/\varepsilon^2 n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Assim $(\hat{\theta}_n-\theta)I(\theta)(\hat{\theta}_n-\theta) \xrightarrow{P} 0$. Em particular,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta.$$

Com isso, $I(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{P} I(\theta)$ pelo teorema do mapeamento contínuo.
Pelo Teorema de Slutsky,

$$\sqrt{n}\, I(\hat{\theta}_n)^{1/2}(\hat{\theta}_n-\theta) \Rightarrow N(0, I_2)$$

Note que $M_n = \|\sqrt{n}\, I(\hat{\theta}_n)^{1/2}(\hat{\theta}_n-\theta)\|_\infty$. Portanto, pelo mapeamento contínuo, $M_n \Rightarrow M = \max\{|Z_1|, |Z_2|\}$, tal que $Z \sim N(0, I_2)$.

b) Seja $P(M \leq q) = 1-\alpha$. Assim

$$1-\alpha = P(M \leq q) = P(|Z_1| \leq q, |Z_2| \leq q) = (1-2\Phi(-q))^2$$

$$\Rightarrow q = -\Phi^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}\right)$$

c) Basta tomar

$$S = \left\{\theta \in \Omega \;\middle|\; \|\Phi^{1/2}(\hat{\theta}_n)\theta\| \in \|\Phi^{1/2}(\hat{\theta}_n)\hat{\theta}_n\|_\infty \pm \frac{q}{\sqrt{n}}\right\},$$

com q dado em b).

Casella e Berger

9.11. Lembrando que
$$F_T(t|\theta) = P_\theta(T \leq t)$$
Seja $C = \{t : \alpha_1 \leq F_T(t|\theta_0) \leq 1 - \alpha_2\}$. Quero mostrar que $P_{\theta_0}(T \notin C) = \alpha$, ou
$$P_{\theta_0}(T \in C) = 1 - \alpha,$$
isto é,
$$\mathbb{P}(\alpha_1 \leq F_T(T|\theta_0) \leq 1 - \alpha_2) = 1 - \alpha.$$
Note que $F_T(T|\theta_0) \sim \mathcal{U}nif(0,1)$

$$\mathbb{P}(F_T(T) \leq x) = \mathbb{P}(T \leq Q_T(x))$$
$$= F_T(Q_T(x)) = x,$$
em que Q_T é a função quartil

Com isso, $\mathbb{P}(\alpha_1 \leq F_T(T|\theta_0) \leq 1 - \alpha_2) = 1 - \alpha_2 - \alpha_1 = 1 - \alpha.$

9.14. $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

Desigualdade de Bonferroni
$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i).$$ Logo
$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \geq \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - 1$$

a) Defina $E_1 = \left\{\mu : -\frac{Ks}{\sqrt{n}} \leq \mu - \bar{x} \leq \frac{Ks}{\sqrt{n}}\right\}$
$$E_2 = \left\{\sigma^2 : \frac{(n-1)s^2}{a} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{b}\right\}$$

Fazendo $\mathbb{P}(E_i) = 1 - \alpha/2$, termos que
$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \geq 1 - \alpha,$$
como desejado. Logo

$$K = t_{n-1,\alpha/4}, \quad a = \chi^2_{n-1,1-\alpha/4}, \quad b = \chi^2_{n-1,\alpha/4}$$

↳ Olhe página 429 Casella ← Página 430

b) Note que trocamos a estatística s pelo valor desconhecido σ^2. Com isso, basta escolhermos K de forma apropriada, lembrando que
$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$
Assim $K = \Phi^{-1}(\alpha/4)$.